

ALGEBRA 1

Zadania dla studentów IZ/INF/PPI

Prowadzący: dr **Teresa Jurlewicz**

Liczby zespolone

Definicja i własności liczb zespolonych

Zadanie 1. Niech z, w będą liczbami zespolonymi, zaś n liczbą naturalną. Wykorzystując własności działań w zbiorze liczb zespolonych uzasadnić, że:

- a) $0 \cdot z = 0$; b) jeżeli $z \cdot w = 0$, to $z = 0$ lub $w = 0$;
c) $(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$; d) $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, gdzie $z \neq 1$;
e) $z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=1}^n z^{n-k} w^{k-1}$; f) $(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$.

Zadanie 2. Liczby zespolone z i w spełniają warunki $z^5 = w^5, z^{17} = w^{17}$. Czy $z = w$? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 3*. Uzasadnić, dlaczego w zbiorze liczb zespolonych nie można wprowadzić relacji nierówności ($<$) tak, aby zachowane były jej wszystkie własności ze zbioru liczb rzeczywistych.

Postać algebraiczna liczby zespolonej

Zadanie 4. Dla $z = 3 + i, w = 4 - 2i$ obliczyć:

- a) $z + 2w$; b) $iz - w$; c) $z(w + i)$; d) $\frac{w+5i}{z-1+i}$.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z spełniające podane równości:

- a) $(3 + i)(z - 1) = 1 - 2i$; b) $(1 + i)(z + 3) = (2iz - 1)(3 - i)$;
c) $\frac{3+i}{z-2i+1} = \frac{i-1}{2-iz}$; d) $z^2 + 4iz - 13 = 0$.

Zadanie 6. Wykorzystując postać algebraiczną liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

- a) $1 - 2z^2 = \bar{z}$; b) $4\bar{z} = z^2 + 4$;
c) $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 4 - i$; d) $\frac{5 \operatorname{Im} z - i(1+2 \operatorname{Re} z)}{\operatorname{Im} z - z} = 1 + 2i$;
e) $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$; f) $z^2 + 8 = 6i$;
g) $z^2 = 3 + i$; h) $z^3 = i$.

Zadanie 7. Na płaszczyźnie zespolonej narysować następujące zbiory:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{1-z}{1+z} = 1\}$;
b) $\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1 + (2 - i)z + (2 + i)\bar{z}\}$;
c) $\{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 10, (\operatorname{Re} z)^4 - (\operatorname{Im} z)^4 = 80\}$.

Zadanie 8. Niech $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}$. Opisać zbiór $\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} + az + a\bar{z} + b = 0\}$. Dla $a = 3 + i, b = 1$ sporządzić rysunek.

Zadanie 9. Naszkicować zbiór wszystkich liczb zespolonych z , dla których liczba

- a) $u = \frac{z+3}{z-4i}$ jest czysto urojona; b) $v = \frac{iz+4}{z-3}$ jest rzeczywista.

Zadanie 10. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} z & + & (1+i)w & = & 1 \\ (2-i)z & + & 2iw & = & i \end{cases}.$$

Zadanie 11. Niech $u, v \in \mathbb{C}$. Uzasadnić wzory:

- a) $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$; b) $\overline{u-v} = \overline{u} - \overline{v}$; c) $\overline{uv} = \overline{u} \cdot \overline{v}$; d) $\overline{u/v} = \overline{u}/\overline{v}$;
 e) $u + \overline{u} = 2 \operatorname{Re} u$; f) $u - \overline{u} = 2i \operatorname{Im} u$; g) $u\overline{u} = (\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2$.

Zadanie 12*. Uzasadnić, że pole trójkąta, którego jeden wierzchołek znajduje się w początku układu współrzędnych, a dwa pozostałe są w punktach $z, w \in \mathbb{C}$ wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{z} \cdot w)|.$$

Moduł i argument liczby zespolonej

Zadanie 13. Naszkicować zbiory liczb zespolonych spełniających podane równości lub nierówności:

- a) $||z| - 5 - 4i| = 5$; b) $i\bar{z}^2 + |z|^2 = 16 + 8i$;
 c) $|6z| > |z^2| + 5$; d) $|z^2| \leq |\operatorname{Re}(2z)| + 3$;
 e) $|2z + 3 - i| = |1 + 3i - 2\bar{z}|$; f) $|z + 1| + |z - 1| = 2$;
 g) $\left| \frac{z^2 - i}{z^2 + i} \right| = 1$; h) $\left| \frac{1 + 2i - z}{1 - 2i + z} \right|^2 = \frac{1 - \operatorname{Im}(iz)}{1 + \operatorname{Im}(iz)}$.

Zadanie 14. Część rzeczywista liczby zespolonej z^2 jest równa 5, zaś jej moduł wynosi 13. Znaleźć z .

Zadanie 15. Niech $u, v \in \mathbb{C}$. Uzasadnić wzory:

- a) $|u + v| \leq |u| + |v|$; b) $|u - v| \geq ||u| - |v||$; c) $|uv| = |u| |v|$; d) $|u/v| = |u| / |v|$;
 e) $|u + v| \leq 2 \max(|u|, |v|)$; f) $2|uv| \leq |u|^2 + |v|^2$; g) $|u + v + w| \geq |u| - (|v| + |w|)$.

Zadanie 16. Dla liczby $z = 1 - 2i$ obliczyć $(\sqrt{|z|} \frac{z+|z|}{|z+|z||})^2$.

Zadanie 17. Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Następnie wykorzystując ją naszkicować podane zbiory:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{3i+4}{z-2i} \right| \geq 5\}$; b) $\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-3}{2i-z} \right| \geq 1\}$; c) $\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{2z+3}{2iz+5} \right| \geq 1\}$;
 d) $\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z^2+9}{z+3i} \right| \geq 2\}$. e) $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 4i| \geq |z^3 - z^2 + 4iz - 4i|\}$.

Zadanie 18. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu liczb zespolonych:

- a) znaleźć najmniejszą i największą wartość modułu liczby zespolonej z , jeżeli $|z - 4 + 3i| \leq 2$;
 b) obliczyć, dla jakich liczb zespolonych spełniających warunek $|z| \leq 1$ wyrażenie $|2i - 3 - z|$ jest najmniejsze, największe.

Zadanie 19. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory (zaznaczyć dokładnie brzegi tych zbiorów):

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z^2| \leq 4 \operatorname{Re} z, |z + i| < |z - i|\}$; b) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| < 5, \operatorname{Re} \frac{z}{1-iz} \leq 0\}$.

Zadanie 20. Dane są liczby zespolone u, v o równych modułach różnych od 0, przy czym nie są one liczbami przeciwnymi. Znaleźć liczbę zespoloną w o tym samym module położoną na dwusiecznej kąta utworzonego przez wektory wodzące liczb u, v .

Zadanie 21*. Wykazać, że jeżeli liczby zespolone u, v, w spełniają warunki $|u| = |v| = |w| = r > 0$ oraz $u + v + w = 0$, to są one wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Zadanie 22*. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone u, v, w o modułach równych 1, których suma i iloczyn są równe 1.

Wskazówka. Wykorzystać interpretacje geometryczne dodawania i modułu liczb zespolonych.

Zadanie 23*. Znaleźć obrazy podanych zbiorów w podanych przekształceniach płaszczyzny zespolonej:

- a) obraz okręgu $|z| = 1$ w przekształceniu $z \rightarrow \frac{1}{z}$;
- b) obraz prostej $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ w przekształceniu $z \rightarrow \frac{1}{z-1}$;
- c) obraz ćwiartki $\operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$ w przekształceniu $z \rightarrow \frac{z-i}{z+i}$;
- d) obraz koła $|z-1| \leq 1$ bez punktu $z=2$ w przekształceniu $z \rightarrow \frac{z+2}{z-2}$;
- e) obraz prostej $\operatorname{Im} z = 0$ w przekształceniu $z \rightarrow \frac{1+iz}{1-iz}$.

Zadanie 24*. Niech p, q będą liczbami zespolonymi, λ - liczbą dodatnią różną od 1. Wykazać, że równanie $\left| \frac{z-p}{z-q} \right| = \lambda$ przedstawia okrąg na płaszczyźnie zespolonej, którego środkiem jest punkt $z_0 = \frac{p-\lambda^2 q}{1-\lambda^2}$, zaś promień jest równy $r = \frac{\lambda|p-q|}{|1-\lambda^2|}$.

Wskazówka. Wykorzystać wzór $|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{u}v$ dla $u, v \in \mathbb{C}$.

Zadanie 25*. ZBIORY JULII. Niech c będzie ustaloną liczbą zespoloną. Dla dowolnego punktu początkowego $z_0 \in \mathbb{C}$ rozważamy ciąg jego obrazów $z_n = z_{n-1}^2 + c$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$ przy kolejnych iteracjach przekształcenia płaszczyzny $z \rightarrow z^2 + c$. Punkt z_0 nazywamy *więźniem*, gdy ciąg (z_n) jest ograniczony. W przeciwnym wypadku punkt z_0 nazywamy *uciekinierem*. Zbiór J_c rozgraniczający zbiory więźniów i uciekinierów nazywa się *zbiorem Julii*. Niech $r_c = \max(|c|, 2)$. Uzasadnić, że

- a) zbiór W_c więźniów jest niepusty;
- b) zbiór U_c uciekinierów jest niepusty;
- c) jeżeli $|z_0| \geq r_c$, to z_0 jest uciekinierem;
- d) punkt z_0 jest uciekinierem wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$;
- e) $W_c = \bigcap_{n=0}^{\infty} W_c^n$, gdzie $W_c^0 = \{z_0 : |z_0| \leq r_c\}$, $W_c^1 = \{z_0 : |z_1| \leq r_c\}$, $W_c^2 = \{z_0 : |z_2| \leq r_c\}, \dots$,
 $W_c^n = \{z_0 : |z_n| \leq r_c\}, \dots$

Napisać program komputerowy przedstawiający graficznie dla danej wartości $c \in \mathbb{C}$ kolejne przybliżenia W_c^n zbioru więźniów W_c

Zadanie 26. Przedstawić w postaci algebraicznej oraz zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej wszystkie liczby zespolone o modułach równych 1 i argumentach będących wielokrotnościami kątów:

- a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c*) $\frac{\pi}{8}$; d*) $\frac{\pi}{12}$.

Zadanie 27. Argumenty główne liczb zespolonych $3+2i, 2+3i, -3+2i, -2-3i$ wyrazić w zależności od $\arctan \alpha$ dla pewnego $\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 28*. Wyrazić $\arg(z_1 - z_2)$ w zależności od $\arg z_1$ i $\arg z_2$ wiedząc, że moduły liczb zespolonych z_1, z_2 są jednakowe.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Zadanie 29. Zapisać w postaci trygonometrycznej podane liczby zespolone:

- a) $\sqrt{2}$; b) -9 ; c) $i - \sqrt{3}$; d) $-2 - 2i$; e) $1 + 5i$; f) $\sqrt{2} - i$.

Zadanie 30. Sformułować i udowodnić wzór de Moivre'a.

Zadanie 31*. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone:

- a) $z = \sin \frac{\pi}{9} + i \cos \frac{\pi}{9}$ i następnie obliczyć z^{51} ;
- b) $z = \sin \frac{9\pi}{8} - i \cos \frac{9\pi}{8}$ i następnie obliczyć z^{10} ;
- c) $z = 1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ i następnie obliczyć z^5 ;
- d) $z = \sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}$ i następnie obliczyć z^7 .

Zadanie 32. Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wyniki przedstawić w postaci algebraicznej):

- a) $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{i^9(1+i)^3}$;
- b) $\left(\frac{5+7i}{1-6i}\right)^{21}$;
- c) $\left(\frac{1-i \operatorname{tg} \frac{\pi}{21}}{1+i \operatorname{tg} \frac{\pi}{21}}\right)^7$;
- d) $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}}{1-i \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}}\right)^3$.

Zadanie 33. Obliczyć:

- a) z^{21} dla $z = \frac{13-i}{(2+i)(1-4i)}$;
- b) z^{12} wiedząc, że $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$.

Zadanie 34. Dla jakiej wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ liczba $z = (1-i)^{23} + t(1+i)^{19}$ jest rzeczywista? Obliczyć z w tym przypadku.

Zadanie 35. Uzasadnić, że dla każdej liczby zespolonej z oraz dla każdej liczby naturalnej n zachodzą wzory:

- a) $|z^n| = |z|^n$;
- b) $\arg z^n = n \arg z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$ (podać wzór na k).

Zadanie 36. Obliczyć moduły i argumenty główne podanych liczb zespolonych:

- a) $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{17}}{(1-i)^{28}}$;
- b) $z = \frac{(1-i\sqrt{3})^{13}}{(1+i)^{25}}$.

Zadanie 37. Obliczyć z^2 i następnie wyznaczyć argumenty główne liczb zespolonych:

- a) $z = 1 - \sqrt{3} + i + i\sqrt{3}$;
- b) $z = 1 + \sqrt{3} + i - i\sqrt{3}$.

Zadanie 38. Na płaszczyźnie zespolonej przedstawić zbiór:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z^4 \geq 0\}$;
- b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} iz^3 < 0\}$;
- c) $\{z \in \mathbb{C} : |z^4| \leq 2 \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z\}$;
- d) $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 1| \leq 1\}$.

Zadanie 39. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory (zaznaczyć dokładnie brzegi tych zbiorów):

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z^2 \cdot \bar{z}| \leq 27, 0 < \arg(z^3) \leq \frac{\pi}{2}\}$;
- b) $\{z \in \mathbb{C} : \arg \frac{1+i}{z-3i} = \frac{\pi}{2}\}$;
- c) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \arg \frac{i-1}{z^2} < \frac{\pi}{2}\}$;
- d) $\{z \in \mathbb{C} : \arg \frac{1+i}{z-4} > \pi\}$;
- e) $\{z^3 : |z| \leq 2, \arg z \leq \frac{\pi}{4}, z \in \mathbb{C}\}$;
- f) $\{z \in \mathbb{C} : |z^3| \leq 2, \arg z^3 \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Zadanie 40. Stosując wzór de Moivre'a wyrazić $\sin 5x$ w zależności od $\sin x$.

Zadanie 41. Stosując wzór de Moivre'a wyrazić $\sin 15^\circ$ w zależności od:

- a) $\sin 5^\circ$ i $\cos 5^\circ$;
- b) $\sin 5^\circ$;
- c) $\sin 3^\circ$ i $\cos 3^\circ$;
- d) $\sin 3^\circ$.

Zadanie 42. Przedstawić w postaci algebraicznej podane liczby zespolone:

- a) $1 + (i - \sqrt{3}) + (i - \sqrt{3})^2 + (i - \sqrt{3})^3 + (i - \sqrt{3})^4 + (i - \sqrt{3})^5$;
- b) $1 - i + (1 - i)^2 + (1 - i)^3 + (1 - i)^4 + (1 - i)^5 + (1 - i)^6$;
- c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004}$.

Zadanie 43*. Obliczyć podane sumy:

- a) $1 + \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2nx$;
- b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.

Zadanie 44*. Ile różnych wartości mogą przyjmować podane liczby zespolone (n jest liczbą naturalną):

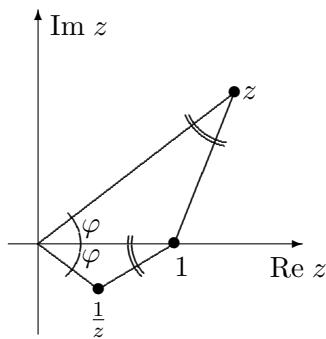
- a) $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^n$; b) $(\frac{-1+i}{\sqrt{2}})^n$; c) $2i^n + 3i^{n+1}$;
d*) $(\cos 1 + i \sin 1)^n$; e) $(\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ)^n$; f**) $(\cos i + i \sin i)^n$.

Zadanie 45. Znaleźć wszystkie pary (p, q) liczb całkowitych, dla których zachodzi równość

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^q.$$

Zadanie 46*. **DODAC RYSUNEK** Uzasadnić prawdziwość przedstawionych na rysunkach poniżej konstrukcji odwrotności liczby zespolonej oraz iloczynu liczb zespolonych i skonstruować podanymi sposobami liczby zespolone:

- a) $(3+i)(7-2i)$; b) $(1+2i)^2$; c) $\frac{1}{4+i}$; d) $\frac{2-i}{4+3i}$.



Zadanie 47*. Kąty ostre α , β , γ są określone warunkami $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3}$. Za pomocą działań na liczbach zespolonych obliczyć $\alpha + \beta + \gamma$.

Zadanie 48*. Obliczyć $(5-i)^4(1+i)$ i następnie uzasadnić następujący wzór Machina:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}.$$

Uwaga. Wzór Machina stosuje się do przybliżania liczby π . Korzysta się przy tym z rozwinięcia funkcji $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ w szereg potęgowy $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Zadanie 49. Mnożąc przez siebie odpowiednie liczby zespolone uzasadnić podane równości:

- a) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$; b) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$;
c) $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$; d*) $44 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{682} + 24 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{12943} = \frac{\pi}{4}$;

Zadanie 50*. W okrąg o promieniu 1 wpisano n -kąt foremny o wierzchołkach $A_1, A_2, \dots, A_n$, gdzie $n \geq 3$. Na okręgu wybrano punkt P . Korzystając z liczb zespolonych udowodnić, że suma $(PA_1)^2 + (PA_2)^2 + \dots + (PA_n)^2$ nie zależy od położenia punktu P .

Zadanie 51*. Liczba zespolona z spełnia warunek $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{2000}$. Obliczyć $z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$.

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Zadanie 52. Zapisać w postaci wykładniczej podane liczby zespolone:

- a) $2 - \sqrt{3} - i$; b) $1 + \sqrt{3} - i - i\sqrt{3}$;
c) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i$; d) $-\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}i$
e) $-\cos \alpha + i \sin \alpha$; f) $\sin \alpha + i \cos \alpha$;
g) $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$; h) $\sin \alpha + i(1 + \cos \alpha)$.

Zadanie 53*. Stosując wzory Eulera wyrazić:

- a) $\sin^4 x$ w zależności od cosinusów wielokrotności kąta x ;
- b) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ w postaci sum sinusów i cosinusów.

Zadanie 54. Niech $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Wyrazić (wraz z uzasadnieniem) w postaci wykładniczej podane liczby zespolone:

- a) $\bar{z}$; b) $-z$; c) $\frac{1}{z}$; d) z^k , gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 55. Stosując postać wykładniczą liczb zespolonych naszkicować podane zbiory:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : \bar{z}^6 = 4iz^2\}$; b) $\{z \in \mathbb{C} : z^4 = \bar{z}^4, |z^3| \geq |9\bar{z}|\}$;
- c) $\{z \in \mathbb{C} : z^3 = i\frac{|z^5|}{z\bar{z}}\}$; d) $\{z \in \mathbb{C} : 2\bar{z}|z^2| = (i\sqrt{3} - 1)z^3\}$.

Zadanie 56*. Niech $z_n = (1 + \frac{i\varphi}{n})^n$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$, będzie ciągiem liczb zespolonych. Uzasadnić, że istnieją granice przy $n \rightarrow \infty$ ciągu (r_n) modułów liczb z_n oraz pewnego ciągu (φ_n) argumentów liczb z_n . Obliczyć te granice i zinterpretować geometrycznie otrzymane wyniki.

Wskazówka. Dostrzec analogię z granicą przy $n \rightarrow \infty$ ciągu $(1 + \frac{x}{n})^n$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 57*. Wiadomo, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} [x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Analogiczne wzory zachodzą też wtedy, gdy zmienną rzeczywistą x zastąpimy przez zmienną zespoloną ix . Zinterpretować na tej podstawie klasyczne wzory Eulera na $\sin x$ i $\cos x$ (symbol granicy w przypadku zespolonym potraktować czysto formalnie, wykorzystać ponadto analogiczne własności sumy i iloczynu zespolonych ciągów zbieżnych).

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Zadanie 58. Korzystając z definicji pierwiastka z liczby zespolonej:

- a) obliczyć $\sqrt{24 + 10i}$; b) obliczyć $\sqrt[3]{-i}$; c) obliczyć $\sqrt[4]{-9}$;
- d) wyznaczyć $\sqrt{\bar{z}}$ wiedząc, że liczba $5 + 2i$ jest pierwiastkiem stopnia 2 z liczby zespolonej z .

Zadanie 59. Stosując wzór na pierwiastki z liczby zespolonej obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

- a) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt[3]{2 - 2i}$, wynik przedstawić w postaci algebraicznej;
- c) $\sqrt[4]{-16}$; d) $\sqrt[5]{i\sqrt{8} - \sqrt{24}}$, wynik przedstawić w postaci trygonometrycznej.

Uwaga. Symbol $\sqrt{}$ występujący wewnątrz pierwiastków zespolonych oznacza tu zwykle pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 60. Opisać, jakie zależności zachodzą w zbiorze pierwiastków zespolonych stopnia $n \geq 2$ z liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ pomiędzy:

- a) kolejnymi pierwiastkami (ze względu na argumenty);
- b) pierwiastkiem o najmniejszym argumentie głównym a pozostałymi pierwiastkami.

Zadanie 61. Odgadując jeden z elementów podanych pierwiastków znaleźć:

- a) wszystkie pierwiastki czwartego stopnia z liczby zespolonej $(\sqrt{3} - i)^8$;
- b) wszystkie pierwiastki czwartego stopnia z liczby zespolonej $(3 + 4i)^2$;
- c) wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie $(z + 3)^4 = (1 - i)^{12}$.

Zadanie 62. Liczba **a)** $1 - i\sqrt{3}$; **b)** $3 + i$ jest jednym z pierwiastków stopnia 3 z liczby zespolonej z . Znaleźć pozostałe pierwiastki i wyznaczyć z . Sporządzić rysunek.

Zadanie 63*. Naszkicować wszystkie pierwiastki stopnia 12 z liczby zespolonej 64 i wybrać te spośród nich, które spełniają zależność $z^2 = \bar{z}^2$.

Zadanie 64. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

a) $(3 - z)^4 = (iz + 1)^4$; **b)** $(z + 2i)^3 = 8z^3$.

Zadanie 65. Wyprowadzić wzory na pierwiastki równania kwadratowego zmiennej zespolonej i znaleźć rozwiązania podanych równań kwadratowych lub wielokwadratowych:

a) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$; **b)** $z^2 - 3z + 3 - i = 0$;
c) $iz^2 + 3iz - 1 + 3i = 0$; **d)** $z^4 - 2\sqrt{3}iz^2 - 4 = 0$.

Zadanie 66. Punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Znaleźć trzeci wierzchołek tego trójkąta. Przeprowadzić obliczenia dla $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 5 + 4i$. Sporządzić rysunek.

Zadanie 67. Punkty z_1, z_3 płaszczyzny zespolonej są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Znaleźć pozostałe wierzchołki tego kwadratu. Przeprowadzić obliczenia dla $z_1 = 1 - 3i, z_3 = -1 + 5i$. Sporządzić rysunek.

Zadanie 68. Punkty z_1, z_4 płaszczyzny zespolonej są przeciwległymi wierzchołkami sześciokąta foremnego. Znaleźć pozostałe wierzchołki tego sześciokąta. Przeprowadzić obliczenia dla $z_1 = 4 - i, z_3 = -6 + i$. Sporządzić rysunek.

Zadanie 69. Niech z będzie jednym z pierwiastków zespolonych stopnia n z liczby 1. Obliczyć wartość wyrażenia $1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$.

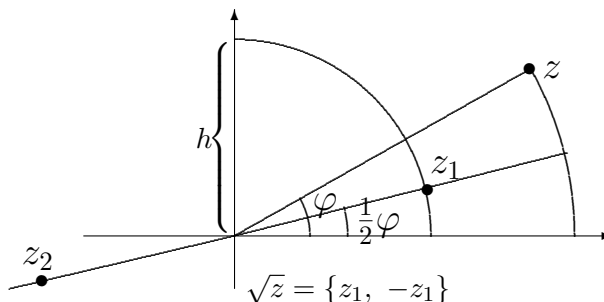
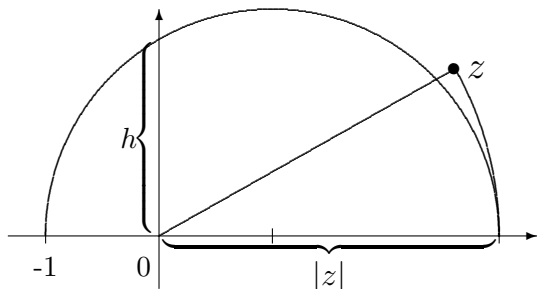
Zadanie 70*. Obliczyć sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków zespolonych stopnia n z liczby zespolonej z o module równym 1.

Zadanie 71*. Uzasadnić, że jednym z pierwiastków stopnia 2 z liczby zespolonej z spełniającej warunek $z + |z| \neq 0$ jest liczba $\sqrt{|z|} \frac{z+|z|}{|z+|z||}$. Wykorzystując ten związek obliczyć następujące pierwiastki:

a) $\sqrt{4i - 3}$; **b)** $\sqrt{5 + 12i}$; **c)** $\sqrt{3 + i}$; **d)** $\sqrt[4]{-7 + 24i}$.

Zadanie 72*. Uzasadnić prawdziwość przedstawionej na rysunkach poniżej konstrukcji pierwiastków kwadratowych z liczby zespolonej. Skonstruować podanym sposobem następujące pierwiastki:

a) $\sqrt{5 + 3i}$; **b)** $\sqrt{-7 + 2i}$.



Zadanie 73*. Niech $\sqrt[2001]{1} = \{1, z_1, z_2, \dots, z_{2000}\}$. Pokazać, że

$$\prod_{k=1}^{2000} (1 - z_k) = 2001.$$

Zadanie 74*. Dana jest liczba zespolona u oraz liczba naturalna n . Znaleźć i przedstawić graficznie wszystkie liczby zespolone z spełniające warunek $(z + u)^n = (z - u)^n$.