

ALGEBRA 1

Informatyka i Zarządzanie / INF / PPI

Rok akademicki 2006/2007, semestr zimowy

Prowadzący: dr **Teresa Jurlewicz**

Wielomiany i ułamki proste

Pierwiastki wielomianów

Zadanie 1. Obliczyć sumy, różnice i iloczyny podanych wielomianów :

- a) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4$, $Q(x) = -x^3 + 5x - 1$;
- b) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
- c) $U(z) = (1 + i)z^2 - 2iz + 4$, $W(z) = z^4 + (2 - i)z^2 + iz$;
- d) $U(z) = z + i$, $W(z) = z^3 + 3iz^2 - 3z - i$.

Zadanie 2. Obliczyć ilorazy i reszty z dzielenia podanych wielomianów :

- a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - x$, $Q(x) = x + 1$;
- b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $Q(x) = 2x^2 - 3$;
- c) $U(z) = iz^3 - z^2 - (1 - 6i)z - i$, $W(z) = z + 3i$;
- d) $U(z) = iz^4 + (2 + 2i)z^3 + 3z^2 + (1 + 2i)z - 3i$, $W(z) = z^2 + 2z + i$.

Zadanie 3. Nie wykonując działań znaleźć resztę z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q , jeżeli :

- a) $P(z) = z^{67} + 1$, $Q(z) = z^3 + iz$;
- b) $P(x) = x^{44} - x^{11}$, $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;
- c*) $P(x) = x^{2002} + x^{2001} + 2000$, $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
- d*) $P(x) = x^{2002} + 2001x - 2000$, $Q(x) = (x^2 - 1)^2$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że podane liczby z_1 są pierwiastkami podanych wielomianów W . Stosując twierdzenie Bezouta znaleźć pozostałe pierwiastki tych wielomianów :

- a) $z_1 = 2i$, $W(z) = z^3 - iz^2 + 8z - 12i$;
- b) $z_1 = -3i$, $W(z) = z^4 + 3iz^3 - 8iz + 24$.

Zadanie 5. Uzasadnić na podstawie twierdzenia Bezouta, że :

- a) wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków;
- b) dwa wielomiany są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich stopnie oraz wszystkie współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są sobie równe.

Zadanie* 6. Pokazać, że wielomiany

$$z^4 - z^3 + z^2 + 2z - 6, \quad z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z + 6$$

mają wspólne pierwiastki zespolone.

Zadanie* 7. Wielomian W stopnia mniejszego od 2005 spełnia warunek

$$W(1) = W(2) = \dots = W(2005).$$

Podać wartość $W(2006) - W(0)$.

Zadanie* 8. Znaleźć wszystkie wielomiany W , które dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$xW(x - 1) = (x - 26)W(x).$$

Zadanie 9. Udowodnić twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych i następnie:

- a) wybrać te spośród liczb całkowitych m , które spełniają związek $\frac{1}{3}m^4 + \frac{1}{3}m^3 - m^2 + \frac{7}{3}m - 2 = 0$.
b) sprawdzić, czy wielomian $W(x) = 9x^4 - x^3 - 7x^2 + x - 45$ ma pierwiastki całkowite.
Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu

$$W(x) = x^4 + \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + x - 1).$$

Zadanie 11. Znaleźć i przedstawić graficznie pierwiastki podanych równań kwadratowych i dwukwadratowych :

- a) $\sqrt{3}z^2 + 2z - i$; b) $z^4 + z^2 + 1$; c) $z^4 + iz^2 + 2$.

Zadanie 12. Znaleźć wszystkie rzeczywiste pierwiastki podanych wielomianów :

- a) $z^3 - z + 6$; b) $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$;
c) $z^4 - 2z^2 + 3z - 2$; d) $x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$;
e) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$; f) $2x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x - 2$.

Zadanie 13. Liczby zespolone a , b są różnymi pierwiastkami wielomianu $W(z) = z^2 + bz - ia$. Znaleźć te liczby.

Zadanie 14. Ile różnych pierwiastków zespolonych ma wielomian $W(z) = z^{12} - 3z^4 + 2$? Przedstawić je na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie* 15. Uzasadnić, że liczba:

- a) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ jest wymierna;
b) $\sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}}$ jest wymierna;
c) $\sqrt[3]{2\sqrt{2} - 4} - \sqrt[3]{2\sqrt{2} + 4}$ jest niewymierna.

Zadanie* 16. Stosując wzory Cardana znaleźć pierwiastki podanych wielomianów :

- a) $W(z) = z^3 + 3z - 4$; b) $W(z) = z^3 + z + 1$; c) $W(z) = z^3 - 3z + \sqrt{3}$;
d) $W(z) = z^3 - 6z + 4$; e) $W(z) = z^3 - 3z + 2$; f) $W(z) = z^3 - \sqrt{3}z + \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}$;
g) $W(z) = z^3 - 9z^2 + 21z - 5$; h) $W(z) = z^3 - 3\sqrt{3}z^2 + 15z - 9\sqrt{3}$; i) $W(z) = z^3 - 3\sqrt{3}z^2 + 8\sqrt{2}$.

Zadanie* 17. Znaleźć wszystkie liczby całkowite p , dla których wielomian $P(x) = x^{13} + x + 90$ jest podzielny przez wielomian $Q(x) = x^2 - x + p$.

Zadanie* 18. Znaleźć liczby wymierne p , q , dla których liczba $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + px^2 + q$.

Zadanie 19. Znaleźć wszystkie pierwiastki podanych wielomianów wykorzystując informacje o jednym z nich :

- a) $W(x) = x^3 - 11x^2 + 29x - 7$, $x_1 = r + \sqrt{3}$, $r \in \mathbb{Q}$;
b) $W(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x - 12$, $x_1 = 1 + \sqrt{5}$.

Zadanie* 20. Liczba $m + n\sqrt{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą, $m, n \in \mathbb{Z}$, przy czym $n \neq 0$, jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych stopnia większego od 1. Wskazać inny pierwiastek tego wielomianu.

Zasadnicze twierdzenie algebry

Zadanie 21. Podane wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów :

- a) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 1$; b) $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1$;
c) $z^6 + z^5 + 3z^4 + 3z^3 - 10z^2 - 10z$.

Zadanie 22. Podane liczby z_1 są pierwiastkami podanych wielomianów W . Znaleźć pozostałe pierwiastki tych wielomianów i przedstawić wszystkie pierwiastki na płaszczyźnie zespolonej :

- a) $z_1 = i\sqrt{2}$, $W(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 4z + 20$;
b) $z_1 = 2(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi)$, $W(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 4z + 8$;
c) $z_1 = 2i$, $W(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 4z + 4$;
d) $z_1 = -i$, $W(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$.

Zadanie 23. Znaleźć liczby $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane liczby są pierwiastkami podanych wielomianów :

- a) $z_0 = -1 + 2i$, $W(z) = z^3 + az + b$;
b) $z_0 = 1 + 2i$, $W(z) = z^4 + az^2 + b$;
c) $x_1 = i - 1$, $V(x) = x^4 + ax^2 + 16x + b$.

Zadanie 24. Znaleźć wielomian o współczynnikach rzeczywistych możliwie najniższego stopnia, którego pierwiastkami są liczby $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + 3i$ i który przy dzieleniu przez $z - 2i$ daje resztę $1 - 5i$.

Zadanie 25. Rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste wielomiany rzeczywiste podanych stopni n o podanych niżej pierwiastkach i ich krotnościach :

- a) $n = 4$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 2 - 3i$;
b) $n = 5$, $z_1 = 4$, $z_2 = 1 - 2i$ o krotności 2;
c) $n = 6$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = i$, $z_4 = 2i$;
d) $n = 7$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$ o krotności 2, $z_3 = 3 - i$.

Zadanie 26. Podane wielomiany rzeczywiste rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste :

- a) $x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8$; b) $x^6 + 64$; c*) $x^{2001} + x^{2000} + \dots + x + 1$;

Zadanie 27. Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = x^4 + bx^3 + 2x^2 + dx + 25$, gdzie $b, d \in \mathbb{R}$, jest liczba $x_1 = 1 - 2i$. Rozłożyć ten wielomian na czynniki rzeczywiste.

Zadanie* 28. Znaleźć niezerowy wielomian o współczynnikach całkowitych możliwie najniższego stopnia, którego pierwiastkami są liczby

$$e^{i\frac{4k\pi}{101}} \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots, 50.$$

Zadanie* 29. Wielomian $W(x) = x^5 - 1$ rozłożyć na czynniki rzeczywiste stopnia co najwyżej 2. Współczynniki wielomianów otrzymanych z tego rozkładu wyrazić bez używania funkcji trygonometrycznych.

Zadanie* 30. Liczby zespolone z , z^2 , z^3 są pierwiastkami wielomianu stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości liczby z .

Zadanie* 31. Wielomian $W(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste. Pierwiastkiem tego wielomianu jest liczba $z_0 = e^{i\varphi}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$. Uzasadnić równość

$$a_{n-1} \sin \varphi + a_{n-2} \sin 2\varphi + \dots + a_1 \sin(n-1)\varphi + a_0 \sin n\varphi = 0.$$

Zadanie* 32. Wykorzystując rozkład wielomianu $x^{2n} - 1$ na czynniki rzeczywiste uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość :

$$\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Zadanie* 33. Niech punkty $P_1, P_2, \dots, P_n$, gdzie $n \geq 3$, będą wierzchołkami n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $R = 1$. Obliczyć

$$|P_1 P_2| \cdot |P_1 P_3| \cdot \dots \cdot |P_1 P_n|.$$

Wskazówka. Przeprowadzić elementarne obliczenia dla $n = 3, 4, 6, 8$ i na podstawie otrzymanych wyników postawić hipotezę na temat wzoru ogólnego. W dowodzie tego wzoru wykorzystać zależność $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ prawdziwą dla każdego $n \geq 2$. Zależność tę wyprowadzić po uprzednim rozkładzie na czynniki stopnia 2 wielomianu będącego ilorzem wielomianu $x^{2n} - 1$ przez dwumian $x^2 - 1$.

Zadanie 34. Rozwiązać podane zadania stosując wzory Viete'a.

a) Obliczyć sumę kwadratów wszystkich pierwiastków wielomianu $W(z) = z^9 + 13z^8 + 5z - 2$.

b) Prosta $y = mx + b$ przecina wykres funkcji $y = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ w pięciu różnych punktach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_5, y_5)$. Pokazać, że liczba $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_5}{5}$ nie zależy od parametrów m i b .

c) Liczby zespolone α, β, γ są pierwiastkami wielomianu $x^3 + x + 1$. Obliczyć wartość wyrażenia $\frac{1}{\alpha + i} + \frac{1}{\beta + i} + \frac{1}{\gamma + i}$.

d) Liczby zespolone α, β, γ są pierwiastkami wielomianu $W(z) = z^3 + (1 - 2i)z + 3 - 5i$. Obliczyć wartość wyrażenia $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$.

Zadanie* 35. Zbadać, czy istnieje wielomian zespolony W taki, że

$$W^2(z) = z^{2002} + z^{2001} + z^{2000} + \dots + z + 1.$$

Zadanie* 36. Niech $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone równania $f\{f[f(x)]\} = 0$.

Zadanie* 37. Czy istnieje wielomian W stopnia 2002, który spełnia warunki $W(1) = W(2) = W(3) = \dots = W(2001) = 1$ oraz $W(2002) = 2, W(2003) = 3$? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie* 38. Przedstawić przy pomocy komputera w układzie $Oxyz$ powierzchnię będącą wykresem funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych postaci

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto |W(x + iy)| \in \mathbb{R},$$

gdzie W jest wielomianem. Dobrać odpowiednio dziedzinę wykresu oraz punkt jego obserwacji tak, aby odnaleźć miejsca, w których styka się on z płaszczyzną xOy . Miejsca te wskazują położenia pierwiastków wielomianu W .

Zadanie* 39. Niech W będzie wielomianem zespolonym stopnia dodatniego. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby $M > 0$ istnieje liczba $R > 0$ taka, że dla każdej liczby zespolonej z , jeżeli $|z| > R$, to $|W(z)| > M$.

Wskazówka. Można wzorować się na uzasadnieniu **Lematu 1** występującego w dowodzie zasadniczego twierdzenia algebry.

Ułamki proste

Zadanie 40. Funkcję wymierną $\frac{x^4 - x^3 - x}{x^3 + 1}$ przedstawić w postaci sumy wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych.

Zadanie 41. Podane zespolone funkcje wymierne rozłożyć na zespolone ułamki proste :

a) $\frac{z - 2i}{z^2 - 4iz - 6}$; b) $\frac{z^2 - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$; c) $\frac{15 - 6z}{(z^2 - 5z + 4)^2}$.

Zadanie 42. Przedstawić w postaci ogólnej rozkład funkcji wymiernej podanych rzeczywistych funkcji wymiernych na rzeczywiste ułamki proste :

a) $\frac{x^3 + 2}{(x^4 - 16)^3}$; b) $(\frac{x - 1}{x^4 + 2x^2 - 3})^3$.

Zadanie 43. Podane rzeczywiste funkcje wymierne rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

a) $\frac{4 - x}{x^3 + 8}$; b) $\frac{x^3 + 2x + 1}{x^4 + x^2}$; c) $\frac{3x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$;
d) $\frac{2x + 2 - x^2}{x^4 + 2x^2}$; e) $\frac{x^3 + 3x + 2}{x^4 + 4x^2 + 3}$; f) $\frac{1}{x^3 + 3x - 4}$;
g) $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 - x + 2}$; h) $\frac{1}{x^4 - 8x^2 - 9}$; i) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$;
j) $\frac{x - 3x^2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$.

Zadanie 44. Podane funkcje wymierne rozłożyć na zespolone oraz na rzeczywiste ułamki proste :

a) $\frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2}$; b) $\frac{1}{z^3 + 4z}$.

Zadanie* 45. Niech wielomian W ma tylko parami różne pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ oraz niech wielomian P ma stopień mniejszy niż n . Uzasadnić, że wówczas :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}, \text{ gdzie } A_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \text{ dla } 1 \leq i \leq n.$$