

ALGEBRA 1

Informatyka i Zarządzanie / INF / PPI

Rok akademicki 2006/2007, semestr zimowy

Prowadzący: dr **Teresa Jurlewicz**

Macierze i wyznaczniki

Uwaga. Zadania oznaczone symbolem (PiZ 3....) są zaczerpnięte z książki T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2006. Są one przeznaczone do pracy samodzielnej, którą mogą ułatwić dodane do zadań odpowiedzi oraz w pełni rozwiązane przykłady o podobnej treści.

Działania i operacje na macierzach

Zadanie 1. (PiZ 3.2) Obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; & \text{b)} & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; & \text{c)} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{d)} & \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}; & \text{e)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}; & \text{f)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. (PiZ 3.3) Rozwiązać podane równania macierzowe i układy równań macierzowych:

$$\begin{aligned} \text{a)} & X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right); & \text{b)} & 2Y \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \text{c)} & \begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}; & \text{d)} & \begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}. \end{aligned}$$

Zadanie 3. (PiZ 3.4) Po obliczeniu kilku początkowych potęg macierzy A wysunąć hipotezę o postaci macierzy A^n , gdzie $n \in \mathbf{N}$. Następnie ją uzasadnić za pomocą indukcji matematycznej, jeżeli macierz A jest postaci:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; & \text{b)} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; & \text{c)} & \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbf{R}; \\ \text{d)} & \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix}, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R}; & \text{e)} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & \text{f)} & \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a \in \mathbf{R}; \end{aligned}$$

g*) $[a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $i \geq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Zadanie 4. (PiZ 3.5) Tworząc odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze zespolone X spełniające podane równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$; c) $X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6 - 2i & -2 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

g) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; h) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; i) $X \cdot X^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie X jest macierzą stopnia 2;

j) $X \cdot X^T = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5. (PiZ 3.6) Korzystając z własności działań z macierzami oraz operacji potęgowania i transponowania macierzy uzasadnić podane tożsamości:

a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, gdzie A, B, C są macierzami o wymiarach równych odpowiednio $n \times m$, $m \times k$, $k \times l$;

b) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$, gdzie A, B są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni;

c) $(A + I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} I$, gdzie A jest macierzą kwadratową, I jest macierzą jednostkową tego samego stopnia, zaś $n \in \mathbf{N}$.

Zadanie* 6. Macierze A, B spełniają warunki $A^7 = B^7$ i $A^{50} = B^{50}$. Czy $A = B$? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie* 7. Uzasadnić, że nie istnieją macierze A, B spełniające warunek $AB - BA = I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Zadanie* 8. Znaleźć wszystkie macierze A stopnia 1998, które spełniają warunki $A^{1997} = I$, $A^{2000} = I$. Odpowiedź uzasadnić.

Wyznaczniki

Zadanie 9. (PiZ 3.7) Obliczyć z definicji podane wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Zadanie 10*. Uzasadnić, że $\det A \neq 0$ i wyznaczyć dwie ostatnie cyfry tego wyznacznika, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 102495 & 550429 & 873296 & 660697 \\ 370628 & 909093 & 127450 & 925601 \\ 835044 & 601178 & 624655 & 263392 \\ 663780 & 487252 & 292276 & 593107 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 11. (PiZ 3.8) Napisać rozwinięcia Laplace'a podanych wyznaczników względem wskazanych wierszy lub kolumn:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, trzeci wiersz;

b) $\begin{bmatrix} i & 1+i & 2 \\ 1-2i & 3 & -i \\ -4 & 1-i & 3+i \end{bmatrix}$, trzecia kolumna;

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, drugi wiersz;

d) $\begin{bmatrix} 2i & 0 & 5 & 6i \\ 4 & 2 & i & 7 \\ 3i & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5i & 0 \end{bmatrix}$, czwarta kolumna.

Zadanie 12. (PiZ 3.9) Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wierszy lub kolumn z największą liczbą zer.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Zadanie 13. (PiZ 3.10) Korzystając z zasady indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości (symbol W_m oznacza wyznacznik stopnia m):

a) $W_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{4^{n+1}-1}{3};$ b) $W_{2n} = \begin{vmatrix} a & \dots & 0 & 0 & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & b & \dots & 0 \\ 0 & \dots & b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix};$

c*) $W_n = \begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin [(n+1)x]}{\sin x},$ gdzie $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Zadanie 14. (PiZ 3.11) Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązania podanych równań:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & -3 & 4x \\ 1 & -2 & x & -4 \\ -1 & x & -x & x+3 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 15. (PiZ 3.12) Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 16. (PiZ 3.13) Obliczyć podane wyznaczniki stopnia $n \geq 2$ wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Zadanie 17. (PiZ 3.14) Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników powodujące obniżenie ich stopni obliczyć:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 18*. (PiZ 3.15) Korzystając z algorytmu Chio obliczyć podane wyznaczniki:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 19. Sprawdzić prawdziwość twierdzenia Cauchy'ego dla macierzy stopnia $n = 2$ oraz $n = 3$. Następnie, wykorzystując własności oraz rozwinięcie Laplace'a wyznaczników, udowodnić twierdzenie Cauchy'ego według podanego niżej schematu:

$$\det A \cdot \det B = \det \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} & \underline{O} \\ \hline -I & B \end{array} \right] \stackrel{\text{operacje typu } w_i + cw_j}{=} \det \left[\begin{array}{c|c} \underline{O} & \underline{AB} \\ \hline -I & B \end{array} \right] = \det AB$$

Zadanie* 20. Elementami macierzy kwadratowej czwartego stopnia są tylko liczby -2 oraz 1 (dowolnie ustawione). Pokazać, że wyznacznik tej macierzy jest podzielny przez 27 .

Zadanie* 21. Pokazać, że istnieje macierz kwadratowa stopnia 12 , złożona tylko z liczb $-1, 0, 1$, której wyznacznik jest równy 1995 .

Zadanie 22. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}]$ stopnia n , jeżeli

$$a_{ij} = \min \{ i, j \} \text{ dla } 1 \leq i, j \leq n.$$

Zadanie* 23. Obliczyć wyznacznik macierzy $[a_{ij}]$ stopnia $n \geq 3$, której elementy mają postać

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{dla } i = j, \\ 1 & \text{dla } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{dla } |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

Zadanie* 24. Obliczyć $\det A$ dla macierzy $A = [a_{ij}]$ stopnia 2005 określonej następująco:

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= 2005 \text{ dla } 1 \leq i \leq 2004, \quad a_{i+2} = -2004 \text{ dla } 1 \leq i \leq 2003, \\ a_{i-1} &= -2005 \text{ dla } 2 \leq i \leq 2005, \quad a_{i-2} = 2004 \text{ dla } 3 \leq i \leq 2005, \\ a_{ij} &= 0 \text{ w pozostałych przypadkach.} \end{aligned}$$

Zadanie* 25. Niech A będzie antysymetryczną macierzą stopnia 1997 . Obliczyć wyznacznik macierzy $1996A - 1998A^T$.

Zadanie* 26. Liczby $4052, 2101, 1224, 7111$ pomnożyć przez 13 , a otrzymane pięciocyfrowe wyniki zapisać jako wiersze macierzy stopnia 5 . Uzasadnić, że wyznacznik tej macierzy jest także podzielny przez 13 .

Zadanie* 27. Elementami macierzy kwadratowej są liczby $0, 1, 2, \dots, 9$. Każdy wiersz tej macierzy czytany jako liczba w systemie dziesiętnym jest podzielny przez 7 . Udowodnić, że wyznacznik tej macierzy także jest podzielny przez 7 .

Zadanie* 28. Miejscowości $M_1, M_2, \dots, M_n$ położone są przy prostoliniowej drodze. Odległość między miejscowościami M_i oraz M_j jest równa d_{ij} , gdzie $1 \leq i, j \leq n$. Udowodnić, że $\det [d_{ij}] \neq 0$.

Zadanie* 29. Pierwszy wiersz wyznacznika stopnia n , gdzie $n \geq 2$, tworzą kolejne liczby pierwsze $2, 3, 5, \dots, p_n$. Pokazać, że w pozostałe wiersze wyznacznika można wpisać liczby naturalne tak, aby był on równy 1 .

Zadanie* 30. Niech I oznacza macierz jednostkową stopnia $n \in \mathbf{N}$. Ponadto niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Uzasadnić równość

$$\det \left(I + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \right) = 1 + \det \left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \right).$$

Zadanie* 31. Na płaszczyźnie zespolonej dane są trójkąty o wierzchołkach z_1, z_2, z_3 oraz w_1, w_2, w_3 . Pokazać, że te trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Zadanie* 32. Uzasadnić, że podane niżej równanie macierzowe nie ma rozwiązań w zbiorze macierzy rzeczywistych

$$2X^2 + 2X = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 33. Wyprowadzić wzory ogólne na podane wyznaczniki stopnia n :

a) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix};$

b*) $\begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ -a & b & a & \dots & a \\ -a & -a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & b \end{vmatrix};$

c*) $\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix};$

d) $\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{vmatrix};$

e*) $\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 + b_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 + b_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix};$

f) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n \end{vmatrix}.$

Zadanie 34. (WYZNACZNIK VANDERMONDE'A).

Niech $V(z_1, z_2, \dots, z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \dots & z_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}$, gdzie $n \geq 2$, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Uzasadnić, że zachodzi wzór

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (z_l - z_k).$$

Wskazówka. Dla $2 \leq k \leq n-1$ wyprowadzić najpierw następujący wzór rekurencyjny

$$V(z_1, \dots, z_k, z_{k+1}) = (z_{k+1} - z_1) \cdot \dots \cdot (z_{k+1} - z_k) V(z_1, \dots, z_k).$$

Odwracanie macierzy

Zadanie 35. Układając odpowiednie równania zbadać z odwracalność podanych macierzy i wyznaczyć, o ile istnieją, macierze do nich odwrotne:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 36. Obliczyć A^2 i na podstawie otrzymanego wyniku wyznaczyć A^{-1} dla macierzy A postaci:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 37. Uzasadnić, że macierz A spełniająca warunek $A^3 + 3A^2 + 2A + 4I = \mathbf{0}$ jest odwracalna i następnie wyrazić A^{-1} w zależności od A .

Zadanie 38. (PiZ 3.16) Korzystając ze wzoru na macierz odwrotną znaleźć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 39. (PiZ 3.17) Metodą bezwyznacznikową obliczyć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Zadanie 40. (PiZ 3.18) Rozwiązać podane równania macierzowe wykorzystując operację odwracania macierzy:

$$\text{a) } X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } 3X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X.$$

Zadanie 41. (PiZ 3.19) Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n spełniającej warunek:

$$\text{a) } A^2 = 8A^{-1}; \quad \text{b) } A^3 - A = \mathbf{0}; \quad \text{c) } A^T = 4A^{-1}.$$

Zadanie* 42. Uzasadnić, że jeżeli macierze A, B stopnia n są odwracalne oraz macierz $A + B$ jest odwracalna, to również macierz $A^{-1} + B^{-1}$ jest odwracalna i zachodzi wzór

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A \cdot (A + B)^{-1} \cdot B = B \cdot (A + B)^{-1} \cdot A.$$

Zadanie* 43. Macierz A jest odwracalna i ma następującą własność: wszystkie elementy jej głównej przekątnej są jednakowe oraz wszystkie elementy spoza jej głównej przekątnej są jednakowe. Z badać, czy macierz A^{-1} ma tę samą własność.

Zadanie* 44. Niech $X_1 = [1 \ 1 \ 1]$, $X_2 = [1 \ -1 \ 2]$ oraz $X_3 = [2 \ 2 \ 1]$. Macierze A, B wymiaru 3×1999 spełniają równości $X_1 A = X_1 B$, $X_2 A = X_2 B$, $X_3 A = X_3 B$. Z badać, czy $A = B$.

$$\text{Zadanie* 45. Macierz } A \text{ spełnia warunek } A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Obliczyć } A^3 + A^{-3}.$$

Zadanie* 46. Macierz P jest odwracalna. Obliczyć sumę wszystkich elementów głównej przekątnej macierzy

$$A = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2000 \end{bmatrix} \cdot P.$$

Zadanie* 47. Liczba zespolona $z \neq 1$ jest pierwiastkiem równania $z^5 = 1$. Uzupełnić zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 \\ 1 & z^4 & z^3 & z^2 & z \\ 1 & z^2 & z^4 & z^1 & z^3 \\ 1 & z^3 & z^1 & z^4 & z^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Teresa Jurlewicz, 10.01.2007