

ALGEBRA 1

Informatyka i Zarządzanie / INF / PPI

Rok akademicki 2006/2007, semestr zimowy

Prowadzący: dr **Teresa Jurlewicz**

Układy Cramera

Uwaga. Zadania oznaczone symbolem (PiZ 4....) są zaczerpnięte z książki T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2006. Są one przeznaczone do pracy samodzielnej, którą mogą ułatwić dodane do zadań odpowiedzi oraz w pełni rozwiązane przykłady o podobnej treści.

Zadanie 1. Metodą rugowania niewiadomych (podstawiania) znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

$$\text{a)} \begin{cases} 4x + 6y = 5 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}; \quad \text{b)} \begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y - 3z = -6 \\ 3x - 2y + z = 9 \end{cases}; \quad \text{c)} \begin{cases} 4x + 2y + z = 7 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ 2x + 4y - z = 5 \end{cases}.$$

Zadanie 2. (PiZ 4.1) Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbf{R}$ podane układy równań są układami Cramera:

$$\text{a)} \begin{cases} (p+1)x - py = 1 \\ 2x + (p-1)y = 3p \end{cases}; \quad \text{b)} \begin{cases} 2px + 4y - pz = 4 \\ 2x + y + pz = 1 \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3 \end{cases};$$
$$\text{c)} \begin{cases} px + 3y + pz = 0 \\ -px + 2z = 3 \\ x + 2y + pz = p \end{cases}; \quad \text{d)} \begin{cases} x - y - z - t = px \\ -x + y - z - t = py \\ -x - y + z - t = pz \\ -x - y - z + t = pt \end{cases}.$$

Zadanie 3. (PiZ 4.2) Korzystając ze wzorów Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

$$\text{a)} \begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}; \quad \text{b)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}; \quad \text{c)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}.$$

Zadanie 4. (PiZ 4.3) Stosując wzory Cramera obliczyć niewiadomą y z podanych układów równań:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x + 7y + 2z + 4t = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}; \quad \text{b)} \begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + 3z + t = 1 \end{cases};$$

$$\text{c)} \quad x + 2y - 4 = 3y + 4z - 6 = 5z + 6s = 7s + 8t = x + y + z + s + t - 2 = 0.$$

Zadanie 5. (PiZ 4.4) Rozwiązać podane układy równań metodą macierzy odwrotnej:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}; \quad \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} y + z + t = 4 \\ x + z + t = -1 \\ x + y + t = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases} .$$

Zadanie 6. (PiZ 4.13) Rozwiązać podane układy Cramera metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases} ; & \text{b) } & \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} ; & \text{d) } & \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \\ \text{e) } & \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases} ; & \text{f) } & \begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Zadanie 7. (PiZ 4.14) Rozwiązać podane układy Cramera metodą kolumn jednostkowych:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases} ; & \text{b) } & \begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases} ; \\ \text{c) } & \begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + z + s = 0 \\ y + z + s + t = 4 \\ x + z + t = 0 \end{cases} ; & \text{d) } & \begin{cases} 2x + 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + y + z + 2s + 3t = 6 \\ 3x - z + s + t = 3 \\ y + 4s + t = 1 \\ 2x + y + z - 2s + 5t = 8 \end{cases} . \end{aligned}$$

Zadanie 8. (PiZ 4.18) Wykonanie pewnego pojemnika wymaga wykonania czterech czynności: narysowania formy, wycięcia formy, złożenia modelu i jego pomalowania. Liczby poszczególnych czynności w kolejnych dniach pracy pewnego pracownika podaje tabela:

	rysowanie	wycinanie	składanie	malowanie
poniedziałek	30	20	10	5
wtorek	20	15	15	10
środa	40	25	20	20
czwartek	30	20	20	20

Obliczyć czas wykonywania poszczególnych czynności, jeżeli w kolejnych dniach łączny czas pracy wynosił odpowiednio 2 h 10 min, 2 h 15 min, 3 h 55 min, 3 h 30 min.

Zadanie 9. Rozwiązując odpowiednie układy równań

- a) znaleźć parabolę przechodzącą przez punkty $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$;
b) wyznaczyć liczby a , b , c wiedząc, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi równość
 $a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x = 0$.
c) znaleźć liczby x , y , z , t o których wiadomo, że $x \sin \alpha + y \cos^2 \alpha + z + t\alpha = 0$ dla każdego
 $0 \leq \alpha < 2\pi$;
d) znaleźć rozkład na rzeczywiste ułamki proste funkcji wymiernej $\frac{2x^2 - 3x + 4}{(x + 2)^2 (x^2 + 1)}$.

Zadanie 10.

- a) Sumy elementów kolejnych wierszy i kolejnych kolumn macierzy A stopnia 2 wynoszą odpowiednio 5, 7 i 6, 6. Znaleźć macierz A , jeżeli $\det A = -18$.
b) Sumy elementów kolejnych wierszy i kolejnych kolumn macierzy B stopnia 3 wynoszą odpowiednio -2 , 4, 2 i 6, 0, -1 . Suma elementów głównej przekątnej oraz drugiej przekątnej tej macierzy wynoszą odpowiednio 3 oraz 1. Znaleźć macierz B , jeżeli iloczyn elementów jej głównej przekątnej jest równy 1.

Zadanie* 11. Wzór Eulera wyrażający zależność między liczbą ścian S , liczbą krawędzi K oraz liczbą wierzchołków W dowolnego wielościanu wypukłego ma postać

$$\alpha S + \beta K + \gamma W + \delta = 0,$$

gdzie α , β , γ , δ są nieznanymi współczynnikami. Znaleźć ten wzór.

Zadanie* 12. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1 < x_2$ oraz y_1, y_2, y'_1, y'_2 istnieje wielomian W stopnia ≤ 3 spełniający warunki

$$W(x_1) = y_1, W(x_2) = y_2 \text{ oraz } W'(x_1) = y'_1, W'(x_2) = y'_2.$$

Zadanie* 13. Elementami macierzy kwadratowej $[a_{ij}]$ stopnia n są liczby całkowite. Udowodnić, że jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{x_2}{2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{x_n}{2} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

jest $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Teresa Jurlewicz, 10.01.2007