

Geometria analityczna przestrzeni R^3

Wektory

Zadanie 1. Obliczyć sumę wszystkich przekątnych równoległoscianu rozpiętego na wektorach

$\vec{u} = (5, 6, 7)$, $\vec{v} = (2, 1, -3)$, $\vec{w} = (3, 1, 5)$ wychodzących z wierzchołków jego podstawy $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Zadanie 2. Znaleźć wektor $\vec{v}$ leżący w płaszczyźnie rozpiętej przez niewspółliniowe wektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i tworzący z nimi jednakowe kąty

a) dla $\vec{u}_1 = (1, 4, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, -8, 2)$; b) w ogólnym przypadku.

Zadanie 3. Korzystając z rachunku wektorowego:

a) wyrazić boki równoległoboku za pomocą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ będących jego przekątnymi;

b) uzasadnić, że ze środkowych trójkąta można zbudować trójkąt;

c*) uzasadnić, że dla krawędzi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ pewnego czworościanu (niezależnie od zwrotów tych wektorów) mamy $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} \neq \vec{0}$;

d) uzasadnić, że środki dowolnej łamanej zamkniętej w przestrzeni złożonej z czterech odcinków są wierzchołkami równoległoboku;

e*) uzasadnić, że punkt przecięcia odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego dzieli na połowę odcinek łączący środki przekątnych tego czworokąta.

Zadanie 4. Korzystając z rachunku wektorowego uzasadnić, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1 licząc od wierzchołków. Ten punkt nazywamy *środkiem ciężkości trójkąta*. Następnie:

a) wyprowadzić wzór na środek ciężkości trójkąta rozpiętego na niewspółliniowych wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$;

b) wyprowadzić wzór na środek ciężkości trójkąta w przestrzeni, jeżeli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są wektorami wodzącymi jego wierzchołków.

Zadanie* 5. Korzystając z rachunku wektorowego uzasadnić, że odcinek łączący wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie, który dzieli te odcinki w stosunku 3 : 1 licząc od wierzchołków. Ten punkt nazywamy *środkiem ciężkości czworościanu*. Następnie:

a) wyprowadzić wzór na środek ciężkości czworościanu rozpiętego na niewspółpłaszczyznowych wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$;

b) wyprowadzić wzór na środek ciężkości czworościanu, jeżeli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ są wektorami wodzącymi jego wierzchołków.

Iloczyn skalarny

Zadanie 6. Niech $\vec{p}$ i $\vec{q}$ będą wzajemnie prostopadłymi wersorami. Obliczyć:

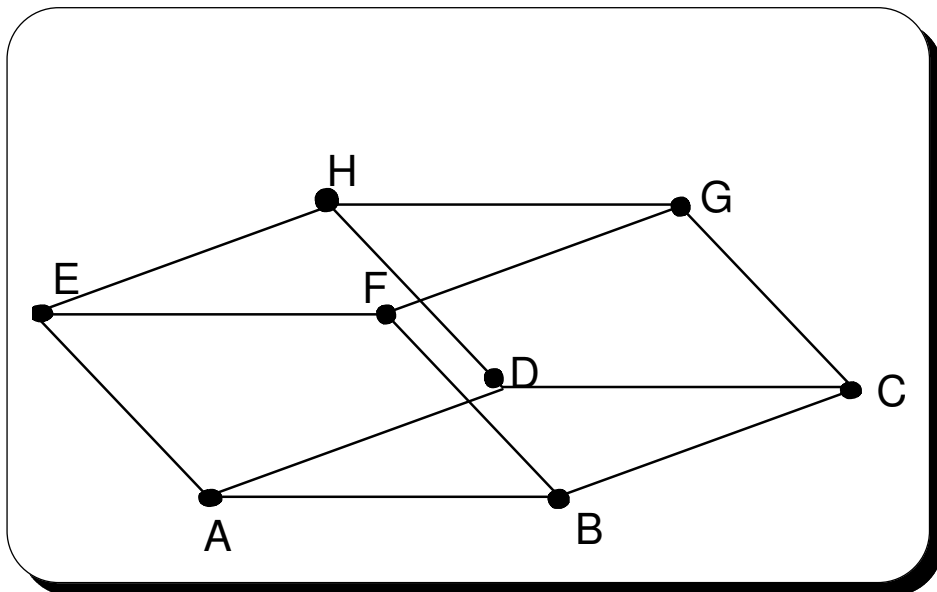
- a) iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 5\vec{q}$;
b) długość wektora $\vec{c} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$.

Zadanie 7. Obliczyć miary kątów wewnętrznych równoległoboku, którego przekątnymi są wektory $\vec{a} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Sporządzić rysunek.

Zadanie 8. Dane są punkty $A = (2, -1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$, $F = (0, 1, 1)$, $H = (1, 1, 2)$ równoległościanu

$ABCDEFGH$ (rysunek).

W jakim punkcie i pod jakim kątem przecinają się jego przekątne BH i CE ?



Zadanie 9. Korzystając z rachunku wektorowego obliczyć:

- a) kąt między przekątnymi sąsiadujących ze sobą ścian sześciangu;
b*) kąt nachylenia krawędzi bocznej czworoscianu foremnego do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 10. Uzasadnić, że dla każdego wektora $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ zachodzą wzory:

- a) $\vec{u} = (\vec{u} \circ \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \circ \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \circ \vec{k})\vec{k}$;
b) $|\vec{u}|^2 = (\vec{u} \circ \vec{i})^2 + (\vec{u} \circ \vec{j})^2 + (\vec{u} \circ \vec{k})^2$;
c) $\vec{u} = |\vec{u}|(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma)$;
d) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,

gdzie α, β, γ oznaczają odpowiednio kąty między wektorem $\vec{u}$, a wersorami $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Uwaga. Liczby $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.

Zadanie 11. Uzasadnić, że rzut prostokątny wektora $\vec{u}$

- a) na niezerowy wektor $\vec{v}$ wyraża się wzorem $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$;
b) na płaszczyznę rozpiętą przez dwa prostopadłe wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ wyraża się wzorem $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}_1}{|\vec{v}_1|^2} \vec{v}_1 + \frac{\vec{u} \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2} \vec{v}_2$.

Zadanie 12. Dane są punkty $P = (2, 0, 5)$, $Q = (3, -1, 8)$ oraz wektor $\vec{u} = (1, -1, 4)$. Znaleźć długość rzutu prostokątnego odcinka PQ :

- a) na prostą równoległą do wektora $\vec{u}$;
- b) na płaszczyznę prostopadłą do wektora $\vec{u}$.

Zadanie 13. Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbf{R}^3$. Uzasadnić podaną tożsamość i podać jej interpretację geometryczną:

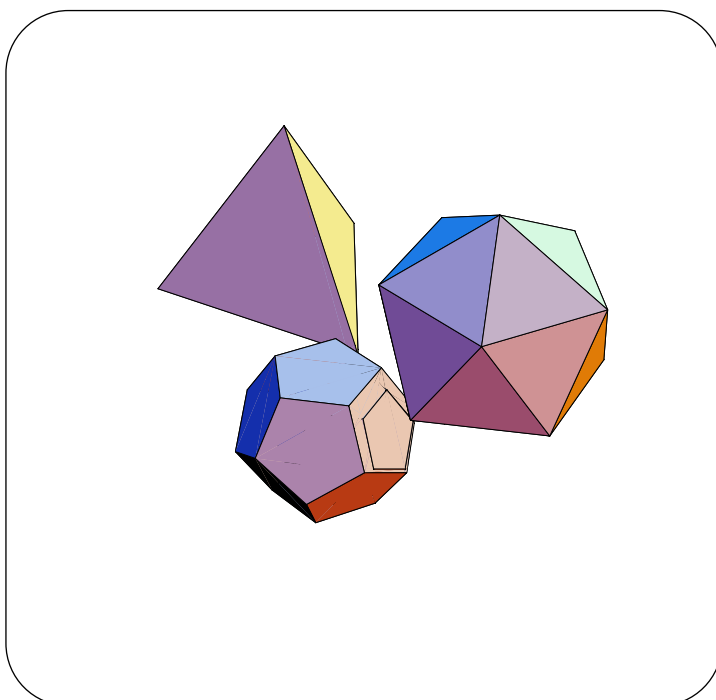
$$3(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2) = |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{w}|^2 + |\vec{v} - \vec{w}|^2.$$

Zadanie 14. Korzystając z rachunku wektorowego wyznaczyć cosinus kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami:

- a) czworościanu foremnego;
- b*) dwunastościanu foremnego;
- c*) dwudziestościanu foremnego.

Wskazówka. W rozwiązaniu można wykorzystać równość $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Jak wyprowadzić tę równość posługując się pierwiastkowaniem liczb zespolonych?

Do sporządzenia rysunku wykorzystano pakiet *Mathematica* wersja 5.0.



Zadanie* 15. Długości n przekątnych równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są równe $\sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2}$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę n , dla której rozważany równoległościan jest prostopadłościanem.

Zadanie* 16. Na sferze o promieniu 1 znajdują się punkty $P_1, P_2, \dots, P_{2004}$. Uzasadnić, że suma kwadratów odległości wszystkich par punktów P_i, P_j , dla $1 \leq i < j \leq 2004$, nie przekracza liczby $(2004)^2$. Przy jakim rozmieszczeniu punktów wartość $(2004)^2$ jest osiągnięta?

Zadanie 17. Niech $\vec{r}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x(t), y(t), z(t))$, gdzie $t \in (\alpha, \beta)$ będzie funkcją wektorową. Pochodną funkcji $\vec{r}$ w punkcie t określamy wzorem $\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Uzasadnić, że zachodzi związek (o ile prawa strona tej równości ma sens):

$$\frac{d}{dt}(\vec{u} \circ \vec{v})(t) = \left[\left(\frac{d}{dt} \vec{u} \right) \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right) \right](t).$$

Iloczyn wektorowy

Zadanie 18. Obliczyć sinus kąta między przekątnymi równoległoboku rozpiętego na wektorach

$$\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}. \quad \text{Znaleźć pole tego równoległoboku.}$$

Zadanie 19. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach A, B, C znajdującego się

a) na płaszczyźnie, przy czym $A = (1, 3), B = (2, 6), C = (-5, 1)$;

b) w przestrzeni, jeżeli $A = (1, -1, 4), B = (3, 3, 2), C = (1, 4, 1)$.

Zadanie 20. Dla jakich wartości parametru p trójkąt o wierzchołkach znajdujących się w punktach

$$O = (0, 0, 0), A = (p, 1, p), B = (1, p, p) \quad \text{ma pole równe } \frac{1-p}{\sqrt{2}} \quad ?$$

Zadanie 21. Wierzchołki czworościanu $OPQR$ znajdują się w punktach $O = (0, 0, 0),$

$P = (1, -1, 0), Q = (1, 0, 1), R = (0, 1, -2)$. Obliczyć pole trójkąta OSR , jeżeli S jest środkiem odcinka PQ . Sporządzić rysunek.

Zadanie 22. Uzasadnić tożsamość $(\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{q}) = -2(\vec{p} \times \vec{q})$, gdzie $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{R}^3$.

Następnie pokazać, że pole równoległoboku o przekątnych $\vec{p}, \vec{q}$ wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2} |\vec{p} \times \vec{q}|.$$

Zadanie 23. Uzasadnić następujące tożsamości:

$$\text{a) } \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w};$$

$$\text{b) } \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u}.$$

Zadanie* 24. Wektory $\vec{OA}, \vec{OB}$ oraz $\vec{OC}$ spełniają warunek

$$\vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} = \vec{0}.$$

Pokazać, że punkty A, B, C są współliniowe.

Zadanie* 25. Do każdej ściany dowolnego czworościanu wystawiono wektor prostopadły o długości równej polu tej ściany, skierowany na zewnątrz. Udowodnić, że suma tych wektorów jest wektorem zerowym.

Zadanie* 26. W wierzchołku O czworościanu $ABCO$ wszystkie kąty płaskie są proste. Udowodnić "przestrzenne twierdzenie Pitagorasa": $(S_{\triangle ABO})^2 + (S_{\triangle BCO})^2 + (S_{\triangle ACO})^2 = (S_{\triangle ABC})^2$, gdzie $S_{\triangle XYZ}$ oznacza pole trójkąta XYZ .

Zadanie 27. Uzasadnić, że zachodzi wzór (o ile prawa strona tej równości ma sens):

$$\frac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v})(t) = \left[\left(\frac{d}{dt} \vec{u} \right) \times \vec{v} + \vec{u} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right) \right](t).$$

Zadanie* 28. Określić, w zależności od wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{y} = \vec{a} \\ \vec{y} \times \vec{z} = \vec{b} \\ \vec{z} \times \vec{x} = \vec{c} \end{cases}.$$

Iloczyn mieszany

Zadanie 29. Znaleźć wszystkie punkty postaci $(0, a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, współpłaszczyznowe z punktami $(2, 2, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 0)$, których odległość od punktu $(1, 1, -2)$ wynosi 3.

Zadanie 30. Dla jakich wartości parametru a punkty $A = (1, a, 5)$, $B = (2, 0, 3)$, $C = (0, a, 4)$, $D = (-1, 2, 6)$ leżą na jednej płaszczyźnie? Napisać równanie ogólne tej płaszczyzny.

Zadanie 31. Sprawdzić, że punkty $A = (6, 5, 1)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (7, -2, 1)$, $D = (5, 2, 1)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta. Obliczyć jego pole.

Zadanie 32.

a) Znaleźć objętość i pole powierzchni równoległościanu rozpiętego na wektorach

$$\vec{a} = (2, -1, 1), \vec{b} = (0, 3, 1), \vec{c} = (1, 1, 0).$$

b) Obliczyć objętość i pole powierzchni czworokąta, którego wierzchołkami są punkty

$$A = (1, 1, 1), B = (3, 0, 2), C = (1, 4, 2), D = (2, 2, 1).$$

c) Znaleźć pole podstawy i wysokość równoległościanu o podstawie $\vec{u}, \vec{v}$ rozpiętego na wektorach

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

d) Obliczyć pole podstawy ABC i wysokość czworokąta, którego wierzchołkami są punkty

$$O = (0, 0, 0), A = (2, 1, -1), B = (1, -2, -1), C = (1, 1, 1).$$

e) Obliczyć objętość czworokąta $OABC$, jeżeli długości jego krawędzi OA, OB, OC są równe odpowiednio 1, 2, 3, zaś kąty między tymi krawędziami wynoszą

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \angle AOC = \angle BOC = \frac{\pi}{3}.$$

Zadanie 33. Uzasadnić, że objętość czworokąta $\mathbf{V}$ o wierzchołkach $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $A_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $A_4 = (x_4, y_4, z_4)$ wyraża się wzorem

$$|\mathbf{V}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 34. Uzasadnić, że objętość równoległościanu $\mathbf{V}$ o przekątnych ścian $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbf{R}^3$ jest równa

$$|\mathbf{V}| = \frac{1}{2} |(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})|.$$

Zadanie* 35. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ dane są niewspółpłaszczyznowe wektory $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Znaleźć wersor, który tworzy z nimi jednakowe kąty.

Zadanie 36. Niech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbf{R}^3$. Uzasadnić tożsamość

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \circ \vec{c} & \vec{a} \circ \vec{d} \\ \vec{b} \circ \vec{c} & \vec{b} \circ \vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}).$$

Zadanie* 37. Cztery punkty poruszają się w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ po prostych ze stałymi prędkościami. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n taką, że jeżeli w chwilach $t = 1, t = 2, \dots, t = n$ punkty były współpłaszczyznowe, to w dowolnej chwili także będą współpłaszczyznowe.

Zadanie* 38. Równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ma objętość V . Podać objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$.

Zadanie* 39. Wewnątrz czworościanu $ABCD$ wybrano punkt O . Udowodnić równość

$$V_{OBCD} \cdot \vec{OA} + V_{OCDA} \cdot \vec{OB} + V_{OABD} \cdot \vec{OC} + V_{OABC} \cdot \vec{OD} = \vec{0},$$

gdzie V_{XYZT} oznacza objętość czworościanu o wierzchołkach X, Y, Z, T .

Równania płaszczyzny i prostej

Zadanie 40. Napisać równanie kierunkowe prostej l :

a) przechodzącej przez punkt $A = (2, 3, -4)$ i równoległej do płaszczyzn

$$\pi_1 : 2x + y - z = 0, \quad \pi_2 : x - 2y + z + 1 = 0.$$

b) przechodzącej przez punkt przecinania się prostych $l_1 : \frac{x-5}{4} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-4}{3}$,

$$l_2 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \text{ i prostopadłej do nich obu.}$$

c) będącej dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$k_1 : (x, y, z) = (1, -1, -2) + s(2, 2, 1), \quad s \in \mathbf{R},$$

$$k_2 : (x, y, z) = (2, 3, 1) + t(-1, 2, 2), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Zadanie 41

a) Napisać równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A = (4, 1, -1)$ i zawierającej prostą $l : x + y + z = 2, x - y - 3z = 4$.

b) Napisać równanie płaszczyzny, której odległości od punktów $P = (2, -1, 3)$ i $Q = (4, -3, -1)$ są jednakowe.

c) Napisać równania ogólne płaszczyzn znajdujących się w odległości równej 2 od początku układu współrzędnych i prostopadłych do prostej $l : \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

d) Znaleźć równania dwóch nieprzecinających się płaszczyzn, z których jedna zawiera prostą $l_1 : 1 - x = y + 1 = 2z$, zaś druga prostą $l_2 : x = 2 + t, y = 1 - 3t, z = 2$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

e*) Znaleźć równania płaszczyzn, które są dwusiecznymi kątów dwusiecznych utworzonych przez płaszczyzny $\pi_1 : 3x - 4y - 12z = 0, \pi_2 : 4x + 12y + 3z - 13 = 0$.

Zadanie 42.

a) Niech $A = (1, -1, 3), B = (0, 2, 5)$. Na prostej $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$ znaleźć punkt C , dla którego pole trójkąta ABC jest najmniejsze.

b) Punkty $A = (2, 3, 2), B = (0, 1, 1)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$, zaś dłuższa przekątna AC tego rombu jest równoległa do prostej $l : x = 2y = z$. Obliczyć pole tego rombu.

c) Podać objętość czworościanu, którego krawędzie o długościach równych 1, 1, 2 wychodzące z wierzchołka $O = (0, 0, 0)$ i leżące w I oktancie układu współrzędnych znajdują się odpowiednio na prostych $k_1 : x = 0, y = z, k_2 : y = 0, x = z, k_3 : z = 0, x = y$.

d) Wyznaczyć czwarty wierzchołek D czworościanu o podstawie $A = (4, 0, -2), B = (4, 2, -3), C = (6, 2, -5)$ i objętości równej 1 leżący na prostej $k : x = 2y = -z$ w odległości 3 od początku układu współrzędnych.

Zadanie* 43. Punkt porusza się w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ w ten sposób, że współrzędne jego położenia w chwili t są wielomianami zmiennej t stopnia nie większego niż 2. Pokazać, że tor tego punktu jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

Zadanie* 44. Napisać równanie prostej, która przecina trzy parami skośne proste

$$l_1 : x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad l_2 : -x = y = \frac{z}{2}, \quad l_3 : \frac{x+1}{2} = y + 1 = \frac{z-2}{-2}.$$

Ile jest takich prostych?

Zadanie* 45. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ dane są proste skośne k i l . Znaleźć zbiór środków odcinków o końcach K i L położonych odpowiednio na prostych k i l .

Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn

Zadanie 46.

a) Znaleźć rzut prostokątny Q punktu $P = (3, 1, 1)$ na prostą

$$l : x + 2y - 2z - 3 = 0, \quad x - 2y + 6z + 1 = 0.$$

b) Znaleźć rzut prostokątny punktu $A = (8, 1, 2)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t + s \\ z = 2 + t + 3s \end{cases}, \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

c) Znaleźć rzut prostokątny oraz rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{u} = (1, 2, 1)$ punktu $P = (0, 1, 1)$ na płaszczyznę $\pi : 2x - y + z = 1$.

d) Uzasadnić, że rzuty prostokątne punktów $A = (1, 2, 0)$, $B = (2, 1, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + y - z = 0$ tworzą wraz z początkiem układu współrzędnych trójkąt równoboczny.

Zadanie* 47. Uzasadnić, że współrzędne w przestrzeni rzutu prostokątnego punktu o współrzędnych B (w zapisie kolumnowym) na prostą lub płaszczyznę rozpiętą na wektorach kolumnowych macierzy A wymiaru 3×1 lub 3×2 mają w zapisie kolumnowym postać $B_0 = A(A^T A)^{-1} A^T B$. Wykorzystując ten wzór znaleźć rzut prostokątny:

a) punktu $P = (1, -2, 0)$ na prostą $l : x = t, y = -3t, z = -2t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$;

b) punktu $P = (2, 1, 3)$ na płaszczyznę π rozpiętą na wektorach $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$;

c) punktu $P = (0, 1, 0)$ na płaszczyznę $\pi : \begin{cases} x = s - t \\ y = s + 2t \\ z = 3s + t \end{cases}$, gdzie $s, t \in \mathbf{R}$.

Zadanie 48. Napisać równanie parametryczne prostej l' będącej rzutem ukośnym w kierunku wektora $\vec{u} = (1, -1, 2)$ prostej $l : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 3$ na płaszczyznę $\pi : x - y + z - 2 = 0$.

Zadanie 49. Znaleźć:

a) punkt B położony symetrycznie do punktu $A = (-3, 1, 2)$ względem prostej

$$l : 2x = y = 1 - z;$$

b) punkt D położony symetrycznie do punktu $C = (0, 1, 0)$ względem prostej

$$k : (x, y, z) = (1, 0, -1) + s(2, 2, -1), \quad s \in \mathbf{R};$$

c) punkt N położony symetrycznie do punktu $M = (0, 1, 1)$ względem płaszczyzny

$$\pi : x + 2y - z + 3 = 0.$$

Zadanie 50.

a) W jakiej odległości od początku układu współrzędnych znajduje się płaszczyzna

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0?$$

b) Obliczyć odległość punktu $P = (1, 0, 1)$ od płaszczyzny przechodzącej przez punkty

$$A = (3, 2, 0), B = (2, 0, 1), C = (1, 2, 4).$$

c) Płaszczyzna π przechodzi przez środek odcinka AB , gdzie $A = (3, 1, -4)$, $B = (-1, 5, 2)$ i jest prostopadła do tego odcinka. Znaleźć odległość płaszczyzny π od początku układu współrzędnych.

Zadanie 51. Znaleźć punkt A leżący na osi Oz , którego odległości od punktu $P = (0, -1, 1)$ oraz od płaszczyzny $\pi : x - 2y - 2z + 5 = 0$ są jednakowe.

Zadanie 52.

a) Analizując odpowiednie odległości sprawdzić, czy punkt $B = (1, 2, 1)$ leży między płaszczyznami $\pi_1 : 2x - y + 2z + 1 = 0$ oraz $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 2 = 0$.

b) Zbadać, czy punkty $A = (3, 2, -1)$, $B = (9, 5, 2)$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\pi : x - 2y + z + 3 = 0$.

c) Zbadać, czy punkty $P = (1, -2, 2)$ i $Q = (-2, 4, 3)$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\pi_1 : 2x + 3z - 7 = 0$ oraz płaszczyzny $\pi_2 : x - 2y + 3z + 13 = 0$.

Zadanie 53. Podać równanie płaszczyzny, która leży w odległości równej 4 od płaszczyzny $\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$ jak najbliżej punktu $A = (1, 3, 0)$.

Zadanie 54.

a) W jakiej odległości od początku układu współrzędnych przebiega prosta

$$l : x + 3y + z = x + 2y + 2z = 9;$$

b) Obliczyć odległość punktu $A = (2, 3, 5)$ od prostej

$$l : x + y - z + 3 = 0, x - y + z - 5 = 0.$$

c) Znaleźć odległość wierzchołka S równoległoboku $PQRS$ od osi Oy , jeżeli $P = (2, 3, -1)$, $Q = (1, -1, 0)$, $R = (2, 1, 4)$.

Zadanie 55. Wyznaczyć punkt zbioru $A = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y - z - 1 = 0, 2x + y + z - 2 = 0 \}$ leżący najbliżej początku układu współrzędnych.

Zadanie 56. Który z punktów prostej $l : x = t, y = -1, z = 1 - t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$ znajduje się w odległości równej $\sqrt{2}$ od prostej $k : x = y = z$?

Zadanie 57. Punkty $A = (1, -2, 1)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (4, 2, 1)$ są trzema kolejnymi wierzchołkami równoległoboku w przestrzeni $\mathbf{R}^3$. Znaleźć odległość czwartego wierzchołka D od prostej $l : x = y, z = 0$.

Zadanie 58.

a) Wyznaczyć odległość między prostymi $k : x - 1 = y = z + 2$, $l : \frac{x}{3} = y + 1 = z$.

b) Obliczyć odległość między prostymi $l : x = 2y = -z$, $k : x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = -2t$, $t \in \mathbf{R}$.

c) W jakiej odległości od osi Oz przebiega prosta $l : x + 2 = \frac{1-y}{3} = \frac{z-2}{2}$?

- d) Wskazać punkty A_1, A_2 należące odpowiednio do prostych $l_1 : x = y = 0$, $l_2 : x - 1 = z = y$ realizujące odległość między tymi prostymi.

Zadanie 59. Określić wzajemne położenie w przestrzeni prostych

$$l_1 : \begin{cases} x + 2y - 7z - 12 = 0 \\ 3x - y + 7z + 6 = 0 \end{cases}, \quad l_2 : 1 - x = \frac{y-2}{4} = z + 1.$$

Zadanie 60. Obliczyć odległość prostej $l : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$ od płaszczyzny

$$\pi : 5x + y + z = 0.$$

Zadanie* 61. Uzasadnić wektorowe wzory na rzuty i odległości punktów, prostych i płaszczyzn w przestrzeni (**Fakt* 5.8 17**). Wykorzystując te wzory znaleźć:

- rzut prostokątny punktu $P_1 = (2, 1, -4)$ na płaszczyznę $\pi : 4(x - 3) + (y + 1) - 2(z - 1) = 0$;
- rzut prostokątny punktu $P_1 = (1, 6, 2)$ na prostą $l : (x, y, z) = (1, 2, 1) + (-1, 3, 2)t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$;
- odległość punktu P_1 od płaszczyzny π danych w zadaniu a);
- odległość między płaszczyznami równoległymi $\pi_1 : 2(x - 3) - (y + 2) + 3z = 0$,
 $\pi_2 : 2x - (y - 4) + 3(z - 2) = 0$;
- odległość punktu P_1 od prostej l danych w zadaniu b);
- odległość między prostymi równoległymi $l_1 : (x, y, z) = (0, 3, 2) + (2, 1, 1)t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$,
 $l_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + (2, 1, 1)s$, gdzie $s \in \mathbf{R}$.
- odległość między prostymi skośnymi $k_1 : (x, y, z) = (2, 2, 10) + (1, 1, -2)s$, gdzie $s \in \mathbf{R}$,
 $k : (x, y, z) = (1, 0, 0) + (0, 1, -1)t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$.

Zadanie 62.

- a) Wskazać punkt, w którym płaszczyzna

$$\pi : (x, y, z) = (4, 1, 5) + s(1, 1, -3) + t(1, 2, -3), \quad s, t \in \mathbf{R},$$

przecina oś i) Ox ; ii) Oy .

- b) W jakim punkcie i pod jakim kątem prosta $l : x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ przecina płaszczyznę

$$\pi : 4x + y + 5z - 13 = 0?$$

- c) W jakim punkcie i pod jakim kątem prosta $l : x - 3z = 7, -y + z = 2$ przecina płaszczyznę

$$\pi : x + y + z = 5?$$

Zadanie 63. Dla jakich wartości parametru p prosta $l : x = t - 1, y = 2t, z = pt, t \in \mathbf{R}$, przecina płaszczyznę $\pi : px - y + 2z + 1 = 0$ pod kątem $\frac{\pi}{6}$?

Zadanie 64. Czworokąt $PQRS$ jest rozpięty na wektorach $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 5)$, $\overrightarrow{PR} = (2, -1, -2)$,
 $\overrightarrow{PS} = (1, 4, 1)$. Obliczyć kąt nachylenia krawędzi $\overrightarrow{PS}$ do podstawy PQR .

Zadanie 65. Obliczyć kąt między parą prostych

$$l_1 : \begin{cases} x - 4y + 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad l_2 : x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

Zadanie 66. W jakim punkcie i pod jakim kątem przecinają się proste

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{oraz} \quad l_2 : \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 3 + 2s \\ z = -1 + 3s \end{cases}, \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

Zadanie 67. Wyznaczyć kąt, pod jakim przecinają się rzuty prostokątne na płaszczyznę xOz prostych

$$k : x = 4 + t, y = 2 + \sqrt{3}t, z = 3 + \sqrt{3}t, t \in \mathbf{R}$$

$$l : x = 3 - s, y = 2 + 3s, z = 2 + \sqrt{3}s, s \in \mathbf{R}.$$

Zadanie 68. Obliczyć kąt między płaszczyznami

$$\pi_1 : 3x - y + 2z - 5 = 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + 3s - 5t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - s + t \end{cases}, \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

Zadanie 69.

a) Obliczyć objętość i pole powierzchni czworościanu ograniczonego płaszczyznami

$$x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y - z + 6 = 0.$$

b) Znaleźć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyznami

$$\pi_1 : -x + y + z = 2, \pi_2 : y - z = 2, \pi_3 : x = 4, \pi_4 : y = 1.$$

c) Obliczyć objętość równoległościanu ograniczonego płaszczyznami

$$x - y = 0, x - y = 2, 2y + z = 0, 2y + z = 3, y + z = 0, y + z = 3.$$

Zadanie 70. Obliczyć pole trójkąta ograniczonego prostymi

$$k : x = 1 + t, y = 5 - 4t, z = 3, t \in \mathbf{R}, \quad l : x = -y = z,$$

$$m : x = 5 - 3s, y = 1, z = 7 - 4s, s \in \mathbf{R}.$$

Zadanie 71. Podać geometryczny opis podzbioru przestrzeni $\mathbf{R}^3$ postaci $A = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + 3z = 3, 2x + 3y + 8z = 7, x - y - z = 1, 3x + 7y + 17z = 13 \}$.

Zadanie 72. Napisać równanie płaszczyzny π przechodzącej przez początek układu współrzędnych i równoległej do prostych

$$l_1 : \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+3}{-14}, \quad l_2 : \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-10}.$$

Określić położenie obu prostych względem tej płaszczyzny i względem siebie.

Zadanie 73. Płaszczyzna $\pi : 2x - y - z = 0$ prostopadła do rombu $ABCD$ przecina go wzdłuż przekątnej BD , gdzie $B = (2, 1, 3)$, $D = (0, -1, 1)$. Znaleźć wierzchołki A , C rombu, jeżeli jego pole wynosi $6\sqrt{6}$.

Zadanie 74. Wewnątrz czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 6, 0)$, $B = (0, 1, -2)$, $C = (3, 2, -3)$, $D = (0, 0, 0)$ znajduje się pewien dodatni odcinek prostej przechodzącej przez punkt D w kierunku wektora $\vec{v} = (1, 2, -2)$. Obliczyć długość tego odcinka.

Zadanie* 75. Dane są proste $l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}_1$, $l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v}_2$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, przy czym $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$. Uzasadnić, że odległość między tymi prostymi jest równa $d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$.

Zadanie* 76. Snajper strzela z punktu $P = (5, 5, 5)$ w kierunku wektora $\vec{v} = (-4, -3, -7)$. Zbadać, czy trafi on w czworoscian o wierzchołkach

$$A = (1, 6, 0), B = (0, 1, -2), C = (3, 2, -3), D = (0, 0, 0).$$

Zadanie* 77. Płaszczyzny pierwszego oktantu układu współrzędnych są zwierciadłami. Promień świetlny wychodzi z punktu $A = (2, 4, 8)$ i po odbiciu od zwierciadeł $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ dociera do punktu $B = (4, 6, 2)$. Wyznaczyć punkty odbić promienia od tych zwierciadeł.

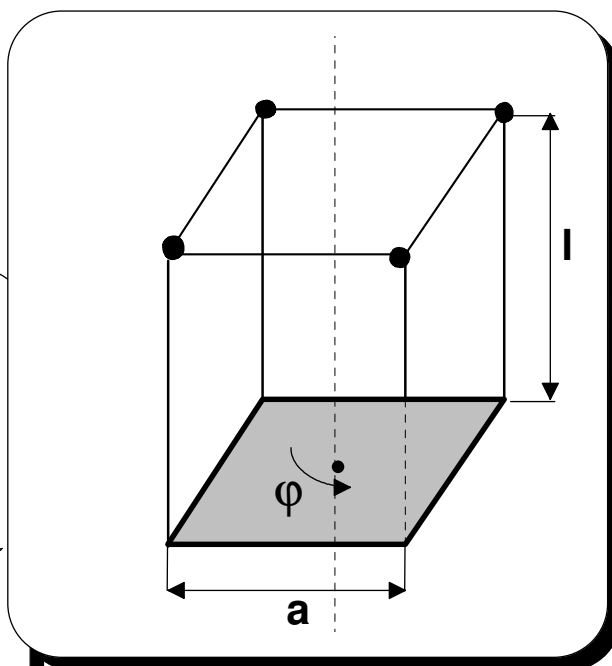
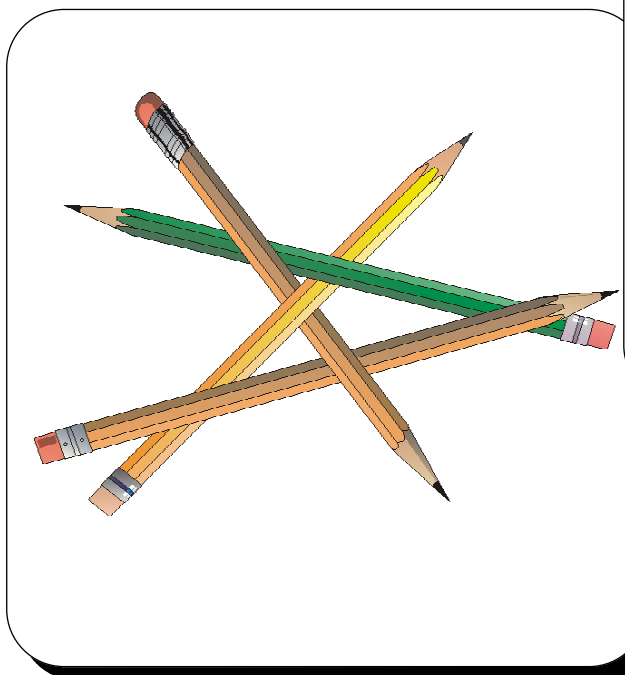
Zadanie* 78. Punkt $A = (3, 8, 1)$ obrócono o kąt a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ wokół prostej $l : x = y = z$. Znaleźć obraz tego punktu.

Zadanie* 79. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Odległości wierzchołków A, B, C sześciokąta od pewnej płaszczyzny są równe odpowiednio 1, 2, 5. Obliczyć odległości pozostałych wierzchołków sześciokąta od tej płaszczyzny.

Zadanie* 80. Wiadomo, że punkty $A = (0, 0, 0)$, $C' = (0, 0, \sqrt{3})$ są końcami jednej z przekątnych sześcianu $ABCD A' B' C' D'$. Ponadto wiadomo, że wierzchołek B sześcianu należy do płaszczyzny xOz . Wyznaczyć współrzędne pozostałych wierzchołków tego sześcianu.

Zadanie* 81. Kwadratowa płyta, której bok ma długość a , jest zawieszona poziomo na czterech pionowych linach o długości l . Obliczyć, o ile podniesie się płyta po jej obrocie o kąt $0 < \varphi \leq \pi$ wokół pionowej osi symetrii. Jakie warunki powinny spełniać liczby a i l , aby taki obrót był możliwy?

Zadanie* 82. Czy możliwe jest ułożenie ołówków przedstawione poniżej? Odpowiedź uzasadnić korzystając z geometrii analitycznej w $\mathbf{R}^3$.



Teresa Jurlewicz
23 lutego 2007 roku