

Lista zadań 2

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczyła, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

1 Ciągi liczbowe

Zadanie 1. Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy tych ciągów:

$$\begin{array}{ll} a) \ x_n = n^n, \ x_{2n} & b) \ y_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}, \ y_{n+1} \\ c) \ a_n = \sqrt[n]{n^2 + 1}, \ a_{n+1}; & d) \ b_n = \frac{1}{(2n)!}, \ b_{3n+2}; \end{array}$$

Zadanie 2. Na podstawie wartości kilku początkowych wyrazów podanych ciągów znaleźć ich wzory ogólne:

$$\begin{array}{ll} a) \ 1, 2, 6, 24, 120, \dots; & b) \ 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots; \\ c) \ 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots; & d) \ 0, 1, 5, 23, 119, \dots; \end{array}$$

Zadanie 3. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

$$\begin{array}{ll} a) \ x_n = n^4 - n^2; & b) \ y_n = (-1)^n n!; \\ c) \ a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}; & d) \ b_n = 2^n - 3^n; \\ e) \ e_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}; & f) \ f_n = \frac{n^n}{n!}. \end{array}$$

Zadanie 4. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

$$\begin{array}{ll} a) \ x_n = \frac{1}{n^2 - 6n + 10} & b) \ y_n = \frac{4^n}{2^n + 3^n} \\ c) \ a_n = n^2 - 49n - 50 & d) \ b_n = 3^n + (-2)^n \end{array}$$

Zadanie 5. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{ll} a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 & b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = 2 \\ c) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3n+1}{n+1} \right] = 2 & d) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n!} = 0 \end{array}$$

Uwaga. Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zadanie 6. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{ll} a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^4 + 16} - n) & b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!} \\ c) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3} & d) \ \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n}) \\ e^*) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} & f^*) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1}) \end{array}$$

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n2^n + 1} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\pi]}{n} \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n+2} & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}} \\ e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{2n+3} & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3+\sin n} \end{array}$$

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

$$\begin{array}{ll} a) z_n = \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} & b) t_1 = 2, \quad t_{n+1} = \sqrt{6+t_n} \\ c) c_n = \frac{1}{4^{1+1}} + \frac{1}{4^{2+2!}} + \dots + \frac{1}{4^{n+n!}} & d) d_n = \frac{(n+1)^3}{n!} \end{array}$$

Obliczyć granice ciągów $\{t_n\}$, $\{d_n\}$.

Zadanie 9. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1} \right)^{15n} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3n+2}{5n+2} \right)^n \cdot \left(\frac{5n+3}{3n+1} \right)^n \right] \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{(-1)^n n} & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{2n^2-3} \end{array}$$

Zadanie 10. Znaleźć podane granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + 5} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n \cos n - 4^n) \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \end{array}$$

Zadanie 11. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n+3) = \infty & b) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 1) = \infty \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - n) = -\infty & d) \lim_{n \rightarrow \infty} (10 - \sqrt[3]{n}) = -\infty \end{array}$$

Zadanie 12. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1) & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(n+1)!}{n!+2} \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{n} \right)^n & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{\arctg n} \\ e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n \\ g) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{n+1}{n} & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg 2^n}{2^n} \end{array}$$

Zadanie 13. Znaleźć zbiory punktów skupienia (właściwych i niewłaściwych) podanych ciągów:

$$\begin{array}{ll} a) a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} & b) b_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4} \\ c) c_n = [1 + (-1)^n] \cdot 2^n & d) d_n = \left(1 + \frac{\cos n\pi}{n} \right)^n \\ e) v_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 4 \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} & f) u_n = \sin n \end{array}$$