

1.1 Logika, zbiory i notacja matematyczna

Zadanie 1. Zbadać, czy podane sformułowania są zdaniami w logice. Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:

1. "Paryż jest stolicą Francji";
2. "Liczba $10^{1000} + 1$ jest podzielna przez 2";
3. " $a^2 + b^2 = c^2$ ";
4. "Piotr nie jest moim bratem";
5. " $2^5 \geq 32$ "; f) " $\Delta = b^2 - 4ac$ "

Zadanie 2. Ocenic prawdziwość podanych niżej zdań złożonych:

1. "nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na R ";
2. " $(-1)^{44} = -1$ lub 2008 jest liczbą parzystą";
3. "funkcja $g(x) = \sin x$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3x$ jest nieparzysta";
4. "jeżeli Piotr jest synem Tadeusza, to Tadeusz jest starszy od Piotra".

Zadanie 3. Zbadać, czy podane zdanie złożone jest prawem logicznym (tautologią):

- a) $\neg(p \vee q) \Rightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$; b) $p \Rightarrow [(q \wedge \neg q) \Rightarrow r]$;
 c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\neg p) \vee q]$; d) $[p \vee (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge q]$.

Zadanie 4. Zbiory określone za pomocą formy zdaniowej zapisać w prostszej postaci:

- a) $\{x \in R : x^2 = 4\}$
 b) $\{k \in \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\} : \text{w brydżu kolor } k \text{ jest starszy od } \diamond\}$;
 c) $\{x \in R : (x < 3) \vee (x \geq 5)\}$;
 d) $\{n \in N : n \text{ jest podzielne przez } 5\}$;
 e) $\{x \in R : (x > 0) \Rightarrow (x^2 > 0)\}$;
 d) $\{n \in N : n \text{ jest podzielne przez } 5\}$;
 f) $\{(x, y, z) : x, y, z \in N \wedge x < y < z \wedge xyz = 16\}$.

Zadanie 5. Zbadać, czy są prawdziwe formy zdaniowe z kwantyfikatorami:

- a) $\bigvee_{x \in R} \sin x = \frac{1}{2}$; b) $\bigwedge_{x \in R} x^2 + 4x + 3 > 0$;
 c) $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 - y^2 = 0$; d) $\bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} xy = 0$;

Zadanie 6. Dla par zbiorów $A, B \subset R$ wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c , B^c , $A \Delta B$, jeżeli:

- a) $A = (0, 5)$, $B = [0, 7]$;
 b) $A = (-\infty, 3)$, $B = (-1, \infty)$;
 c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
 d) $A = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$, $B = \{\frac{2}{n} : n \in N\}$.

Wskazać te pary A, B , dla których $A \subset B$.

Zadanie 7. Określić relacje zawierania między zbiorami A, B , jeżeli:

- a) $A \cup B = A$; b) $A \cup B \subset A$;
 c) $A \setminus B = A$; d) $B \subset A \cap B$.

1.2 Podstawowe zbiory liczbowe

Zadanie 8. Przypomnij sobie dowód tego, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pokaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 9. Pokaż, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ jest taką liczbą naturalną, że $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, to istnieje liczba naturalna k taka, że $k^2 = n$.

Zadanie 10. Pokaż, że jeśli $q \in \mathbb{Q}$, to $\sqrt{2} + q \notin \mathbb{Q}$. Dla jakich liczb wymiernych $q \in \mathbb{Q}$ mamy $q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?

Zadanie 11. Niech $a = 3.1415926535897932385 \dots$. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy liczby

$$a_n = \frac{[a \cdot 10^n]}{10^n}.$$

Wyznacz 10 pierwszych wyrazów tego ciągu, tzn. oblicz liczby a_0, a_1, a_9 . Uwaga: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zadanie 12. Pokaż metodą indukcji matematycznej, że

$$1. \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Uwaga: Powinno się znać również proste wyprowadzenie tego wzoru wynikające z następującego rachunku

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & & 2 & + & & 3 & + & \dots & + & n & + \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 & = & n(n+1) \end{array}$$

$$2. \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$3. \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$4. \quad \forall (n \in \mathbb{N})(n < 2^n)$$

$$5. \quad (\forall n \geq 4)(n^2 < 2^n)$$

$$6. \quad (\forall (n \geq 4))(2^n < n!)$$

$$7. \quad (\forall (n > 1))(6|n^3 - n)$$

Zadanie 13. Pokaż, korzystając z poprzedniego zadania, że $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$. Zauważ, że ten wynik ma swoją interpretację geometryczną:

				9	
			7		
		5			
	3				
1					

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \cdot 5 = 25$$

Zadanie 14. Załóżmy, że $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ jest nieskończonym ciągiem liczb naturalnych. Pokaż, że $(\forall (n \in \mathbb{N}))(k \leq n_k)$.

Zadanie 15. Wyznacz samodzielnie sześć pierwszych wierszy trójkąta Pascala. Wypisz wzory na $(x+y)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, 5$.

*

Zadanie 16. Symbolem $|X|$ oznaczamy liczbę elementów skończonego zbioru X . Niech X będzie n -elementowym zbiorem. Dla $k \leq n$ określamy

$$[X]^k = \{Y \subset X : |Y| = k\}.$$

1. Pokaż, że $|[X]^k| = \binom{n}{k}$
2. Korzystając z poprzedniego wyniku podaj kombinatoryczne wyprowadzenie tożsamości Pascala $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
3. Symbolem $P(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X . Pokaż, że jeśli $|X| = n$, to $|P(X)| = 2^n$.

Zadanie 17. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

pokaż, że

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ i podaj interpretację kombinatoryczną tego faktu
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Zadanie 18. Narysuj wykres wartości $\binom{20}{k}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, 20$. Która z tych liczb jest największa? Uogólnij to spostrzeżenie dla ciągu liczb $\{\binom{n}{k}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ dla dowolnego n . Wskazówka: Możesz, np., skorzystać z funkcji KOMBINACJE programu Excel.

Zadanie 19. Pokaż, że $\binom{m+n}{k} = \sum_{l=0}^k \binom{m}{l} \binom{n}{k-l}$.

2.1 Liczby rzeczywiste

Zadanie 20. Wyznacz następujące zbiory:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$,
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

Zadanie 21. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(-A)$, gdzie $-A = \{a : -a \in A\}$. Wywnioskuj z tego, że każdy ograniczony z dołu podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny.

Zadanie 22. Wyznacz kresy dolny i górny następujących zbiorów:

1. $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
2. $(0, 1) \cup (3, 4]$
3. $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$
4. $[0, 1]/\mathbb{Q}$
5. $\mathbb{N}$
6. $\mathbb{Z}$

Zadanie 23. Niech $A = \{x \geq 0 : x^2 < 2\}$. Pokaż, że $\sup(A)^2 = 2$ (czyli, że $\sup(A) = \sqrt{2}$).

Zadanie 24. Korzystając z tego, że $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, pokaż, że $|\sin(x) + 2\cos(x)| \leq \sqrt{5}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.